

第三章

問題 1 : (i) について。 $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ のとき、 $L = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \mid \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$ とすれば L は線形空間の条件をすべて満たし、 A を含むので、 $\text{span} A \subset L$ となる。逆に、 A を含む線形空間 M を取れば、どんな $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ に対しても、 $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \in M$ となるため、 $L \subset M$ となり、したがって $L \subset \text{span} A$ となる。以上から $L = \text{span} A$ が導かれた。

(ii) について。同様に $L = \cup \{\text{span} B \mid B \subset A, |B| < +\infty\}$ と定義すると、任意の $x \in A$ に対して $B = \{x\}$ とすれば $x \in \text{span} B \subset L$ となり、よって L は A を含む。 L が線形空間であることを示すために、 $x, y \in L$ と $a \in \mathbb{R}$ を任意に取る。まず、 $x \in \text{span} B_1, y \in \text{span} B_2$ となる B_1, B_2 を取り、 $B = B_1 \cup B_2$ とすれば、(i) の方から $x + y \in \text{span} B$ となるため、 $x + y \in L$ となる。明らかに $ax \in \text{span} B_1$ となるため、 $ax \in L$ であり、以上から L が線形空間であることが示された。故に、 $\text{span} A \subset L$ となる。逆は前と同様に、 M が A を含む線形空間ならば任意の有限集合 $B \subset A$ について必ず $\text{span} B \subset M$ が成り立つため、 $L \subset M$ でもある。この M に $\text{span} A$ を代入すれば $L \subset \text{span} A$ を得て、前の結果と合わせることで $L = \text{span} A$ を得る。

問題 2 : 順序を多少変えて証明する。

(1) $\sup_{x \in A} \|x\| = M_1, \sup_{y \in B} \|y\| = M_2$ とするとき、 $x \in A, y \in B$ ならば

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq M_1 + M_2$$

を得るため、 $A + B$ は有界である。

(4) $c_n = a_n + b_n$ は $A + B$ の点列とし、 $a_n \in A, b_n \in B$ であるとし、さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$$

と仮定する。 A はコンパクトであるから、 $a_{k(n)}$ という A 内への収束部分列が存在する。その収束先 $a \in A$ を取る。このとき $b_{k(n)} = c_{k(n)} - a_{k(n)}$ は $c - a$ に収束していなければならないが、 B は閉なので $c - a \in B$ 。したがって $c = c - a + a \in A + B$ 。ゆえに $A + B$ は閉である。

(2) 定理 2.25 より、 $A + B$ が列コンパクトかつ閉であることを証明すればよい。閉性はすでに (4) で示した。よってここでは $A + B$ が列コンパクトであることを証明すればよい。

いま、 $A + B$ 上の点列 (c_n) を取り、ただし $c_n = a_n + b_n$ かつ $a_n \in A, b_n \in B$ とす

る。 A はコンパクトであるから (a_n) は収束部分列 $(a_{k(n)})$ を持つ。 B はコンパクトであるから、点列 $(b_{k(n)})$ は収束部分列 $(b_{l(n)})$ を持つ。すると $c_{l(n)} = a_{l(n)} + b_{l(n)}$ は収束する。以上で証明が完成した。

- (3) $c = a + b \in A + B$, $a \in A$, $b \in B$ とする。 A は開であるから、 $B_r(a) \subset A$ となる $r > 0$ が存在する。このとき $B_r(c) \subset A + B$ である。

(5)

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y \geq \frac{1}{x} \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0, y \geq \frac{1}{|x|} \right\}$$

とすれば、

$$A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

である。

問題 3 : (i) について。ノルムの公理をひとつひとつ確認していけばよい。

- (1) $\|x\| \geq 0$ は $\langle x, x \rangle \geq 0$ からただちに従う。
 (2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ も $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ からただちに従う。
 (3) $\|ax\| = |a|\|x\|$ について。計算すれば、

$$\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |a| \|x\|$$

となる。

- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ について。これは定理 3.5 の上で読者に任せると書かれているので、詳細に書く。まずシュワルツの不等式から示そう。

$$f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2 \lambda^2$$

は高々ひとつしか解を持たない二次式である。よって判別式はゼロ以下でなければならず、

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

がわかる。両辺の平方根を取ればシュワルツの不等式が出る。

次に三角不等式を示す。これは直接計算すると、

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

となる。両辺の平方根を取れば三角不等式が出る。

(ii) $x, y \in H$ とし、 $\|x\| + \|y\| = r$ とする。このとき、 $\|(z, w) - (x, y)\| < 1$ ならば $\|z\| < r + 1$ となるが、このような (z, w) に対して

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle - \langle z, w \rangle| &= |\langle x - z, y \rangle + \langle z, y - w \rangle| \\ &\leq \|y\| \|x - z\| + \|z\| \|y - w\| \\ &< (2r + 1) \|(x, y) - (z, w)\| \end{aligned}$$

となる。したがって、 $B_1((x, y))$ 上で内積関数は $2r + 1$ というリプシッツ定数を持つため、連続である。

問題 4 : $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

以下、これが内積の公理を満たすこと、および $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ を確かめる。

- $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$ は定義にそのまま当てはめればわかる。
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ および $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ は $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ からわかる。
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ は明らかである。
- $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ については、

$$\begin{aligned} 8(\langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle) &= 2(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2) \\ &= (\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2) \\ &\quad - (\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2) \\ &= \|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2 \\ &= (2\|x_1 + x_2 + y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2) \\ &\quad - (2\|x_1 + x_2 - y\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2) \\ &= 2(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2) \\ &= 8\langle x_1 + x_2, y \rangle \end{aligned}$$

として示される。

- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ について。段階を踏んで示す。まず $\alpha = n \in \mathbb{N}$ については、 $n = 0, 1$ の場合は明らかであり、 $n \geq 2$ の場合は上の加法性から帰納法を用いて容易に示される。

- 次に $\alpha = -n, n \in \mathbb{N}$ の場合は、一つ前の結果から

$$\begin{aligned} 4\langle -nx, y \rangle &= \| -nx + y \|^2 - \| -nx - y \|^2 = -[\| nx + y \|^2 - \| nx - y \|^2] \\ &= -4\langle nx, y \rangle = -4n\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

として示される。

- $\alpha = r = q/p \in \mathbb{Q}$ (ただし $p, q \in \mathbb{Z}, p > 0$ とする) の場合、上の結果から

$$\begin{aligned} r\langle x, y \rangle &= (1/p)\langle qx, y \rangle = (1/p)\langle (qp/p)x, y \rangle \\ &= (p/p)\langle rx, y \rangle = \langle rx, y \rangle \end{aligned}$$

となって示される。

- $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ であることを示すために、 α に収束する有理数列 (r_n) を取る。すでに示した通り $\langle r_n x, y \rangle = r_n \langle x, y \rangle$ である。この両辺は明らかに連続であり、したがって極限を取れば $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ を得る。

問題5：(i) は明白である。(ii) については、直交していればこの不等式が成り立つことは自明であるので、逆だけを示せばよい。証明は対偶法による。 x と y は直交していないと仮定する。このとき $y \neq 0$ であるため、二次関数

$$f(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2 - \|x\|^2 = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda$$

の判別式は正である。よって $f(\lambda) < 0$ となるような λ が存在しなければならない。以上で証明が完成した。

問題6：0 に収束する数列は有界であるから、 c_0 は l_∞ の部分空間である。ノルムもおなじであり、 l_∞ は完備であるので、後は c_0 が l_∞ の部分集合として閉であるということだけを示せばよい。

まず、 $x^n = (x_m^n) \in c_0$ とし、これが $x = (x_m) \in l_\infty$ に収束していると仮定する。我々の目標は、 $x \in c_0$ を示すことである。そこで背理法の仮定として、 $x \notin c_0$ としてみよう。すると x の部分列 $y = (x_{k(m)})$ で、ある $\varepsilon > 0$ に対して常に $|y_m| \geq \varepsilon$ となるようなものが存在する。 y は有界数列であるから、必要に応じてさらに部分列を取れば、それが収束していると仮定してよい。その収束先を α とする。 y についての仮定より $|\alpha| \geq \varepsilon$ であることに注意する。

この y に対応して、 x^n のほうも部分列 $y^n = (x_{k(m)}^n)$ を取る。明らかに $\|y^n - y\| \leq \|x^n - x\|$ であるから、 y^n は y に収束する。そこで十分大きな n に対して、

$$\sup_m |y_m^n - y_m| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。ところで y^n は 0 に収束し、 y は α に収束しているので、十分大きな m に対して

$$|y_m^n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

かつ

$$|y_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる。すると、

$$\varepsilon \leq |\alpha| \leq |y_m^n| + |y_m^n - y_m| + |y_m - \alpha| < \varepsilon$$

となって矛盾が生ずる。ゆえに $x \in c_0$ でなければならない。以上で証明が完成した。

問題 7 : $g(t) \in [2t - 1, 2t + 1]$ をすべての $t \in [0, 1]$ に対して満たし、かつある t^* に対しては $g(t^*) \in \{2t^* - 1, 2t^* + 1\}$ を満たすような連続関数 $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ が該当する。

問題 8 :

- (1) まず $x'_1 \neq 0$ は明らかである。 $x'_{n-1} \neq 0$ まで示されたとすれば、そこから x'_n も定義できる。また、各 φ_k は $x_1, \dots, x_k$ の線形結合であるから、 $x'_n = 0$ は $\{x_1, \dots, x_n\}$ が線形従属であったことを意味し、あり得ない。よって $x'_n \neq 0$ であり、帰納法によって結論を得る。
- (2) $\|\varphi_1\| = 1$ は明白である。そこで、 $k \in \{1, \dots, n-1\}$ に対する φ_k について $\|\varphi_k\| = 1$ であり、かつ $i < k$ なら $\langle \varphi_k, \varphi_i \rangle = 0$ であると仮定して、 φ_n もおなじ性質を持つことを示す。 $\|\varphi_n\| = 1$ は明白である。次に、 $k < n$ として、

$$\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \frac{1}{\|x'_n\|} (\langle x_n, \varphi_k \rangle - \langle x_n, \varphi_k \rangle) = 0$$

である。よって確かに (φ_n) は正規直交系である。

問題 9 :

- (1) 有界であることは正規であることから明白である。次に (f_m) をこの集合内の点列とし、 f に収束していると仮定する。仮定から、十分大きな m_0 と $m > m_0$ となる任意の m について

$$\|f_m - f\| < 1$$

となる。一方、任意の $k \neq l$ について

$$\|e_k - e_l\|^2 = 2$$

である。これは $m > m_0$ ならば f_m はすべておなじ点を取るということを意味する。故にそれは f に等しく、したがって f はこの集合に所属していなければならない。これで閉であることが示せた。最後に、 $f_m = e_m$ として点列 (f_m) を作るとこれのどんな部分列もコーシー列にならず、したがってどんな部分列も収束しない。

(2) まず、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$$

だと仮定する。このとき、

$$x^m = \sum_{n=1}^m a_n e_n \in M$$

を考える。明らかに $\|x^m\| = a_1^2 + \dots + a_m^2$ であるから、 $\|x^m\|$ は $+\infty$ に発散する。よって (x^m) はいかなる収束部分列も持たず、故に M はコンパクトではない。

次に、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

を仮定する。この仮定から、部分和

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n^2$$

としたとき、数列 (s_m) は収束するため、コーシー列である。ここで (c_n) が $|c_n| \leq a_n$ を満たしているならば、

$$x^m = \sum_{n=1}^m c_n e_n$$

としたとき、 $k < \ell$ として

$$\|x^\ell - x^k\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\ell} c_n^2 \leq \sum_{n=k+1}^{\ell} a_n^2 = |s_\ell - s_k|$$

となるが、すでに述べたように (s_m) はコーシー列なので、 (x_m) もコーシー列である。よって

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \in M$$

はきちんと定義されており、 (x^m) は x に収束する。

そこで、今度は

$$x^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^m e_n$$

という M 内の点列を考えよう。仮定により数列 (c_1^m) は有界であり、したがって収束部分列を持つ。それを $(c_1^{k_1(m)})$ と書く。以下、 $c_l^{k_l(m)}$ まで定まり、 $1 \leq i \leq l$ に対して $c_i^{k_i(m)}$ は c_i^* に収束すると仮定する。このとき $c_{l+1}^{k_{l+1}(m)}$ は有界なので、収束部分列を持つ。それを $c_{l+1}^{k_{l+1}^{(m)}}$ と書く。これらの操作によって逐次的に定まった部分列に対して、今度は $y^m = x^{k_m(m)}$ という x^m の部分列を取る。このとき、

$$y^m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{k_m(m)} e_n$$

である。また、

$$y^* = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e_n$$

とする。 $|c_n^*| \leq a_n$ は明らかなので、上の y^* はきちんと定義されている。

y^m が y^* に収束していることを示そう。すでに示した結果から

$$\begin{aligned} \|y^m - y^*\|^2 &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (c_n^{k_m(m)} - c_n^*) e_n \right\|^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 \end{aligned}$$

である。 $\varepsilon > 0$ をひとつ固定しておこう。このとき、

$$|c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 \leq 4a_n^2$$

である。最初の仮定から、十分大きな n_0 に対して

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

となる。一方、 $1 \leq n \leq n_0$ なる i に対しては、ある m_0 について、 $m > m_0$ ならば

$$|c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 < \frac{\varepsilon}{3n}$$

となるようにできる。するとこのような m に対して、

$$\|y^m - y^*\|^2 = \sum_{n=1}^{n_0} |c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |c_n^{k_m(m)} - c_n^*|^2 < \varepsilon$$

であることがわかる。つまり (y^m) は (x^m) の収束部分列である。よって M は列コンパクトであることがわかった。

さらに、 M の収束部分列を上のように取れば、その収束先 y^* は必ず M 内にある。最初から (x^m) が収束しているならば、その収束先は y^* と一致しなければならない、よってその収束先は M 内にある。これは M が閉であることを意味する。以上で証明が完成した。

問題 10 :

(1) まず、

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i \langle x, \varphi_i \rangle + \sum_{i=1}^n c_i^2$$

である。これは各 c_i についての二次関数であって、しかもそのヘッセ行列は単位行列の 2 倍に等しい。よって各 c_i で微分して 0 と置いたものが最小点となるが、計算すれば $c_i = \langle x, \varphi_i \rangle$ が得られる。

(2) これは、

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, \varphi_i \rangle^2$$

について、移項して極限を取ることで示される。

(3) まず、収束正項級数の各項は 0 に収束しなければならないため、(2) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, \varphi_n \rangle^2 = 0$$

が得られる。しかしこの式と (3) は明らかに同値である。

問題 11 :

(1) Φ を含む正規直交系の全体という空間に包含関係で半順序を定める。次に、 $\mathcal{C}$ をその空間の鎖として、

$$\Psi = \cup_{C \in \mathcal{C}} C$$

とする。このとき Ψ は明白に $\mathcal{C}$ の上界となる。したがってツォルンの補題により、この空間には極大元が存在する。この場合の極大とは完備の言い換えに他ならない。

(2) まず Φ が完備であるとし、すべての $\varphi \in \Phi$ に対して $\langle x, \varphi \rangle = 0$ であるしよう。 $x \neq 0$ ならば $\psi = x/\|x\|$ として $\Phi \cup \{\psi\}$ が正規直交系になるが、これは矛盾である。した

がって $x = 0$ でなければならない。逆に $x = 0$ ならば明らかにどんな $\varphi \in \Phi$ についても $\langle x, \varphi \rangle = 0$ である。

次に Φ が完備でないと仮定する。 $\Phi \subset \Psi$ となる完備な Ψ をひとつ取り、 $x \in \Psi \setminus \Phi$ とすれば、明らかに $x \neq 0$ かつすべての $\varphi \in \Phi$ に対して $\langle x, \varphi \rangle = 0$ である。以上で証明が完成した。

- (3) (i) から (ii) は (2) から明白である。(ii) から (iii) を示すために、ベッセルの不等式から、

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$$

が定義できるということに注意しておく。そこですべての φ_n に対して $\langle y, \varphi_n \rangle = \langle x, \varphi_n \rangle$ となり、(ii) によって $y = x$ を得る。

(iii) から (iv) は内積の連続性から明白である。

(iv) から (v) は、単に $x = y$ として (iv) を適応させればよい。

(v) から (i) については対偶法による。完備でないとすれば、(2) によってある x に対して $x \neq 0$ かつ $\langle x, \phi_n \rangle = 0$ であり、よって

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_n \rangle|^2 < \|x\|^2$$

となる。

問題 12 :

- (1) $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ を H の可算稠密部分集合とする。一般性を失うことなく、すべての n について $x_n \neq 0$ であると仮定してよい。 D からシュミットの直交化法で作った正規直交基底を (φ_n) と置く。

ここで $x \in H$ がすべての φ_n と直交していると仮定する。すると x はすべての x_n と直交することになる。一方、 x に収束する D の点列 (y_m) を取れば、

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle y_m, x \rangle = 0$$

となるため、 $x = 0$ がわかる。問題 11 の (2) により、 (φ_n) は完備である。

- (2) 上の (ϕ_n) に対して n 番目だけが 1 で他は 0 であるような数列を対応させる作用素を L と置く。 L は $\text{span}(\phi_n)$ 上で定義された線形作用素へと容易に拡張することができるが、この L は等長である。よって L は連続であり、したがって一様連続である。値

域は完備であるから、定理 2.20 によって L の定義域はその閉包まで拡張することができる。しかしそれは H に等しい。さらに、この拡張の方法では L の等長性はそのまま保たれることも明白である。等長作用素は明らかに単射かつ両連続なので、最後に残ったのは L の全射性の確認だけであるが、 $x = (x_m) \in l_2$ のとき、問題 10 で示されたように

$$y = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \varphi_m$$

は定義されており、 $Ly = x$ である。

問題 13 : M が空であれば意味のない命題なので、 $M \neq \emptyset$ とする。(i) を仮定したとき、 $x, y \in M$ ならば $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| < 2a$ となり、(ii) が示される。逆に (ii) を仮定し、 $x \in M$ を適当にとると、

$$a = \|x\| + \sup_{x, y \in M} \|x - y\| + 1$$

とすれば、任意の $y \in M$ に対して

$$\|y\| \leq \|x\| + \|y - x\| < a$$

となって (i) が示される。

問題 14 : 1) について。 $\xi, \eta \in X/\text{Ker}T$ とする。このとき、 $x \in \xi, y \in \eta$ とすれば、

$$\tilde{T}(a\xi + b\eta) = T(ax + by) = aT(x) + bT(y) = a\tilde{T}(\xi) + b\tilde{T}(\eta)$$

となる。

2) について。全射であることは明白である。 $\tilde{T}(\xi) = \tilde{T}(\eta)$ としよう。 $x \in \xi, y \in \eta$ とすれば、 $T(x) = T(y)$ である。すると、 $T(x - y) = 0$ であるから $x - y \in \text{Ker}T$ であり、 $x \in \eta$ が導かれるため、 $\xi = \eta$ を得る。したがって $\tilde{T}$ は単射である。

問題 15 : l_1 については n 番目のみが 1 で他が 0 であるような数列を取ればよい。

問題 16 : A に属する任意有限個の元が一次独立であるような集合 A をすべて集めてきた族 $\mathcal{A}$ を考え、これに包含関係による半順序を定める。次にその半順序による鎖 $\mathcal{C}$ を適当に取り、それらの合併を取ればそれが $\mathcal{C}$ の上界になる。したがってツォルンの補題によって極大元 A^* が存在する。

後は極大元 A^* がハメル基であることを示せばよい。背理法により、 $\text{span} A^* \neq X$ と仮定し、 $x \in X \setminus \text{span} A^*$ を取る。このとき $\{x\} \cup A^* \in \mathcal{A}$ となるが、これは A^* の極大性に矛盾する。以上で証明が完成した。

問題 17 : 答えが書いてある。

問題 18 :

- (1) a. について。 K はコンパクトなので有界である。この場合の有界とは 2 章で定義した用語であるが、問題 13 によって 2 章での有界性と 3 章での有界性は同値であることが確かめられている。よってある $a > 0$ に対して $K \subset aS$ である。一方、 U は 0 の近傍であるから、ある $b > 0$ に対して $bS \subset U$ である。このとき、 $(b/a)K \subset U$ である。b. については、上と同じ b を使えば、 $\|x\| \leq r_n b$ ならば必ず $x \in r_n bS \subset r_n U$ となるため、主張が確かめられる。

- (2) まずイ. について。有限次元であればユークリッド空間と位相同型であるから、これは明らかである。

ロ. について。 $bS \subset \frac{1}{2}K$ となるような $b > 0$ をひとつ取ってくる。 K は全有界であるから、 K の b -網 $(x_1, \dots, x_r)$ が存在しなければならない。これが条件を満たすことは明白である。

ハ. について。まず、 $y \in K$ であるため、上で確認したことからある x_{i_0} に対して

$$y \in (x_{i_0} + \frac{1}{2}K)$$

である。したがって $y_1 = 2(y - x_{i_0}) \in K$ となる。以下、帰納的に $y_p \in K$ まで定まったとしよう。このとき、ある x_{i_p} が存在して、

$$y_p \in (x_{i_p} + \frac{1}{2}K)$$

である。したがって $y_{p+1} = 2(y_p - x_{i_p}) \in K$ となる。こうして生まれた y_p が望む等式を満たす。

ニ. について。これは K の有界性から明らかである。

ホ. について。以上の考察から、 K は $\text{span}\{x_1, \dots, x_r\}$ の閉包に含まれることがわかる。しかし $\text{span}\{x_1, \dots, x_r\}$ は有限次元であるから、定理 3.10 によってそれは閉である。故に K は $\text{span}\{x_1, \dots, x_r\}$ 自体に含まれる。しかし K は 0 を中心とする十分小さな半径の球体を含むから、 $\text{span}\{x_1, \dots, x_r\}$ は全空間を含まなければならない。以上で証明が完成した。

問題 19：まず、ヘルダーの不等式から、この L_y はきちんと定義された線形汎関数であり、

$$|L_y x| \leq \|y\|_q \|x\|_p$$

であるから、ここから有界性も得られる。

問題 20：まず、 $T = 0$ なら $\|T\| = 0$ である。次に $T \neq 0$ であるとする。このときある $x \in X$ に対して $Tx \neq 0$ なので、 $\|T\| > 0$ である。

次に、 $\|aT\| = |a|\|T\|$ は明らかである。最後に、

$$\|(T + S)x\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq (\|T\| + \|S\|)\|x\|$$

であるから、上限に移行して $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$ を得る。以上で証明が完成した。

問題 21： e_j を第 j 単位ベクトルとすれば、

$$\|T\| \geq \|Te_j\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ij}^2}$$

である。

問題 22：答えが書いてあるが、いちおう詳細に記述しておく。まず $E_n = \{x \in X \mid \forall a \in A, |f_a(x)| \leq n\}$ とする。すると

$$E_n = \bigcap_a f_a^{-1}([-n, n])$$

と書けるため、 E_n は閉集合である。ここで $x \in X$ を任意に取れば、

$$\sup_a |f_a(x)| < n$$

となる任意の n に対して $x \in E_n$ であり、よって $X = \bigcup_n E_n$ である。ベールのカテゴリー一定理から、ある非空開集合 U を含む E_n が存在する。この U 内ではすべての $a \in A$ に対して $|f_a(x)| \leq n$ である。以上で証明が完成した。

問題 23：これも答えが書いてあるがいちおう詳細に記述しておく。

$$f_a(x) = \|T_a(x)\|$$

として族 (f_a) を作る。このとき問題 22 からある開集合 U と実数 c についてすべての $a \in A$ が U 内で $|f_a(x)| \leq c$ という条件を満たす。そこで、任意に $x \in U$ をひとつ選

ぶ。このとき $B_r(x) \subset U$ となる半径 $r > 0$ が存在する。そこで $y \in B_r(0)$ とすれば $y + x \in U$ であるから、すべての $a \in A$ に対して

$$\|T_a(y)\| \leq \|T_a(y+x)\| + \|T_a(x)\| \leq 2c$$

となる。すると、

$$\|T_a\| = \sup_{\|z\|=1} \|T_a(z)\| \leq \sup_{\|z\|<2} \|T_a(z)\| \leq \frac{4c}{r}$$

がすべての $a \in A$ について成立する。以上で証明が完成した。

問題 2 4：線形であることの証明は容易なので省略する。有界性は、族 (T_n) が問題 2 3 の条件を満たすことに注意して、対応する K を取れば、 $\|T\| \leq K$ がわかる。

問題 2 5：まず、 $x \in X$ をひとつ固定し、関数 $g_\alpha(\Lambda) = (\Lambda \circ T_\alpha)x$ と定義すると、 $\Lambda \in Y'$ を固定したとき、 $g_\alpha(\Lambda)$ の値は仮定によって有界である。また定義から g_α は線形でもあるため、ここから問題 2 3 より、ある定数 $M_x > 0$ が存在して、すべての $\alpha \in A$ について $\|g_\alpha\| \leq M_x$ となる。そこで、 $S = \{\Lambda \in Y' \mid \|\Lambda\| = 1\}$ とすると、 $\beta = (\alpha, \Lambda) \in B \equiv A \times S$ についての族

$$f_\beta(x) = \Lambda(T_\alpha x)$$

に関して、我々は上の議論で

$$\forall \beta \in B, |f_\beta(x)| \leq M_x$$

を示したことになる。したがって固定した $x \in X$ について $\{f_\beta(x) \mid \beta \in B\}$ は有界である。 f_β の線形性に注意してふたたび問題 2 3 を適用すると、ある定数 $M > 0$ が存在して、すべての $\beta \in B$ に対して

$$\|f_\beta\| \leq M$$

という結論を得る。ここで、 $\|x\| = 1$ となる $x \in X$ に対して、系 3.4 から $\Lambda(T_\alpha x) = \|T_\alpha x\|$ となる $\Lambda \in S$ を取ると、 $\beta = (\alpha, \Lambda)$ に対して

$$\|T_\alpha x\| = |\Lambda(T_\alpha x)| = |f_\beta(x)| \leq M$$

となるため、 $\|T_\alpha\| \leq M$ でなければならない。以上で証明が完成した。

問題 2 6：まず $\mathcal{C}$ を $\mathcal{U}$ における鎖とする。 $\mathcal{C}$ に所属する (M', Λ') に対応する M' すべての合併を M^* と置く。 $x, y \in M^*$ かつ $a, b \in \mathbb{R}$ のとき、 $x \in M', y \in M''$ となる

$(M', \Lambda'), (M'', \Lambda'') \in \mathcal{C}$ を取り、一般性を失うことなく $(M', \Lambda') \geq (M'', \Lambda'')$ を仮定する。すると $M'' \subset M'$ なので、 $ax + by \in M' \subset M^*$ となる。以上から、 M^* は X の線形部分空間であることがわかる。明らかに $M \subset M^*$ である。次に、 $x \in M^*$ とすれば、 $x \in M'$ となるような $(M', \Lambda') \in \mathcal{C}$ が存在する。そこで $\Lambda^*(x) = \Lambda'(x)$ と定義する。ふたたび $x, y \in M^*$ かつ $a, b \in \mathbb{R}$ として、 $x \in M', y \in M''$ となる $(M', \Lambda'), (M'', \Lambda'') \in \mathcal{C}$ を取り、一般性を失うことなく $(M', \Lambda') \geq (M'', \Lambda'')$ とする。このとき

$$\Lambda^*(ax + by) = \Lambda'(ax + by) = a\Lambda'(x) + b\Lambda'(y) = a\Lambda^*(x) + b\Lambda^*(y)$$

となるため、 Λ^* は線形である。明らかに $\Lambda^*(x) \leq p(x)$ が常に成り立ち、また M 上では $\Lambda^*(x) = \Lambda_1(x)$ となるため、 $(M^*, \Lambda^*) \in \mathcal{U}$ が判明したことになる。これが $\mathcal{C}$ の上界となる。

問題 2 7 : 実際、(i) は明らかであり、(ii) と (iii) も

$$p(ax) = |\Lambda(ax)| = |a\Lambda(x)| = |a||\Lambda(x)| = |a|p(x),$$

$$p(x + y) = |\Lambda(x + y)| = |\Lambda(x) + \Lambda(y)| \leq |\Lambda(x)| + |\Lambda(y)| = p(x) + p(y)$$

として容易に示される。

問題 2 8 : (i) については、 $p(0) = p(0 \times 0) = |0|p(0) = 0$ として示される。(ii) については、

$$p(x - y) = p((-1)(y - x)) = |-1|p(y - x) = p(y - x)$$

となるため、正しい。(iii) については、 $p(x) \leq p(x - y) + p(y)$ なので $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$ である。同様に $p(y) - p(x) \leq p(y - x)$ であるが、(ii) を適用すると $p(y - x) = p(x - y)$ なので、ここからただちに (iii) を得る。

問題 2 9 : $\text{span}\{x_0\} \cup M = M^*$ とする。ここで、

$$M^* = \{ax_0 + x | a \in \mathbb{R}, x \in M\}$$

であることは簡単に示せる。実際、右辺は明らかに $\{x_0\}$ と M を含む線形空間であり、逆に $\{x_0\}$ と M を含む線形空間は必ず右辺を含むから、ここから容易に上の等式を得る。したがって、 $y \in M^*$ ならばある数 $a \in \mathbb{R}$ について $y - ax_0 \in M$ となる。 $y - ax_0, y - bx_0 \in M$ のとき、両者を差し引きして $(b - a)x_0 \in M$ となるが、 $x_0 \notin M$ なので $b = a$ でなければならない。したがって上の表現における a は一意的に定まる。そこで、 $\Lambda(y) = 2a$ と定義する。

$y, z \in M^*$ かつ $c, d \in \mathbb{R}$ とする。仮定から、 $y - ax_0, z - bx_0 \in M$ となる $a, b \in \mathbb{R}$ が一意的に存在するが、このとき

$$(cy + dz) - (ca + db)x_0 = c(y - ax_0) + d(z - bx_0) \in M$$

となるため、

$$\Lambda(cy + dz) = 2(ca + db) = c\Lambda(y) + d\Lambda(z)$$

となって、 Λ の線形性が示される。特に $\Lambda(x_0) = 2$ であり、かつ $x \in M$ ならば $\Lambda(x) = 0$ である。

最後に、 $\|y\| = 1$ かつ $\Lambda(y) = 2a \neq 0$ のとき、 $z = y - ax_0 \in M$ として、

$$1 = \|y\| = \|ax_0 + z\| = |a|\|x_0 - (-a^{-1})z\| \geq |a|\rho(x_0, M) = \frac{|\Lambda(y)|}{2}\rho(x_0, M)$$

となる。 M は閉なので $\rho(x_0, M) > 0$ であり、したがって

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda(y)| \mid y \in M^*, \|y\| = 1\} \leq \frac{2}{\rho(x_0, M)}$$

を得る。以上から Λ が M^* 上で有界であることが示されたため、定理 3.13 が適用できて、この Λ は全空間に拡張できる。

問題 30：ヒントに書いてある通り、 $M = \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ とし、 $\Lambda_1(tx_0) = tp(x_0)$ と定義すると、この Λ_1 はハーン＝バナッハの定理によって p との順序を保ったまま全空間に拡張できる。拡張した関数を Λ と書くことにして、 $\Lambda \in X'$ を示するのが証明の目標である。このためには Λ が原点で連続であることを示せばよい。そこで $\varepsilon > 0$ を固定すると、 p が連続なので、 $r > 0$ をうまく取ると、 $x \in B_r(0)$ ならば $0 \leq p(x) < \varepsilon$ となるようにできる。このとき $x \in B_r(0)$ ならば

$$\Lambda(x) \leq p(x) < \varepsilon,$$

$$-\Lambda(x) = \Lambda(-x) \leq p(-x) < \varepsilon$$

より、 $|\Lambda(x)| < \varepsilon$ が導かれる。以上から、 Λ は確かに連続であることが判明した。

問題 31： Φ が線形であることは、

$$\Phi(aS + bT) = \Lambda(aSx + bTx) = a\Lambda(Sx) + b\Lambda(Tx) = a\Phi(S) + b\Phi(T)$$

からわかる。また、

$$|\Phi(T)| = |\Lambda(Tx)| \leq \|\Lambda\|\|Tx\| \leq \|\Lambda\|\|T\|\|x\|$$

から、 Φ の連続性と $\|\Phi\| \leq \|x\| \|\Lambda\|$ がわかる。

もし $x = 0$ なら $\|\Phi\| \leq 0$ なので $\|\Phi\| = 0 = \|x\| \|\Lambda\|$ である。次に $x \neq 0$ であるとしよう。 $\varepsilon > 0$ をひとつ固定する。 $\|y\| = 1$ かつ $|\Lambda(y)| \geq \|\Lambda\| - \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ となるような y を取ってくる。系 3.4 から $\Lambda'(x) = \|x\|$ かつ $\|\Lambda'\| = 1$ となる線形汎関数 Λ' が存在する。この Λ' に対して、

$$T(x') = \Lambda'(x')y$$

と定義するとこれは X から Y への線形作用素である。さらに、

$$\|T(x')\| = |\Lambda'(x')| \|y\| \leq \|x'\|$$

$$\|T(x)\| = |\Lambda'(x)| \|y\| = \|x\|$$

から、 T は連続で $\|T\| = 1$ であることもわかる。このとき、

$$|\Phi(T)| = |\Lambda(Tx)| = |\Lambda(\|x\|y)| = \|x\| |\Lambda(y)| \geq \|x\| \|\Lambda\| - \varepsilon$$

となる。 ε は任意だったので $\|\Phi\| = \|x\| \|\Lambda\|$ を得る。以上で証明が完成した。

問題 3 2 :

- (1) Λ を (P) を保ったまま拡大可能な空間 M' と、対応する拡大 Λ' の組 $N' \equiv (M', \Lambda')$ の全体を $\mathcal{A}$ と置く。 $(M, \Lambda) \in \mathcal{A}$ であるため $\mathcal{A}$ は非空で、また

$$N_1 \geq N_2 \Leftrightarrow M_2 \subset M_1, \Lambda_1(f) = \Lambda_2(f) \text{ for all } f \in M_2$$

と定義した $\mathcal{A}$ 上の二項関係 $\geq$ は半順序を成す。これが帰納的であることを示すために、 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ 上の鎖とする $\mathcal{C}$ 内に属する N' に対する M' すべての合併を $\bar{M}$ とし、対応して $\bar{\Lambda}$ を、 $f \in \bar{M}$ のときに、 $f \in M'$ となる $N' \in \mathcal{A}$ を一つ取って $\bar{\Lambda}(f) = \Lambda'(f)$ として定義する。 $\bar{M}$ が線形空間であること、および $\bar{\Lambda}$ の線形性は問題 2 6 と同様にして容易に示せる。 $f \in \bar{M}$ かつ $f \geq 0$ とすれば、 $f \in M'$ となる $N' \in \mathcal{A}$ を取ったとき、 $\bar{\Lambda}(f) = \Lambda'(f) \geq 0$ となる。かくして、 $(\bar{M}, \bar{\Lambda}) \in \mathcal{A}$ が判明したため、これが鎖 $\mathcal{C}$ の上界となる。よってツォルンの補題により、 $\mathcal{A}$ には極大元 (M^*, Λ^*) が存在する。 $M^* = C(X, \mathbb{R})$ であることを示すために、背理法の仮定としてそうではないと仮定する。するとある関数 $f \in C(X, \mathbb{R}) \setminus M^*$ が存在する。 X はコンパクトであるから、 f には最小値 m が存在する。そこで $g = f - m$ と置けば $g \geq 0$ であるが、一方で $1 \in M$ であるから $g \notin M^*$ である。

次に、 $h \leq g$ であるような関数 $h \in M^*$ を取る。このとき、 g の最大値を C とすると、 $C - h \geq 0$ であるから $\Lambda^*(h) \leq C\Lambda^*(1)$ となる。よって

$$s = \sup\{\Lambda^*(h) | h \in M^*, h \leq g\} \in \mathbb{R}$$

となる。 $0 \leq g$ であるから $s \geq \Lambda^*(0) = 0$ が得られる。

次に $M' = \text{span}\{g\} \cup M^*$ とする。容易に示せるように、このとき任意の $h \in M'$ に対してある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $h - ag \in M^*$ となる。さらに、 $h - ag \in M^*$ かつ $h - bg \in M^*$ ならば、差し引きして $(b - a)g \in M^*$ となるが、 $g \notin M^*$ なので $a = b$ となり、したがって上の a は h の選び方に応じて一意的に定まる。そこで $\Lambda'(h) = \Lambda^*(h - ag) + as$ と定義しよう。これが線形な Λ^* の拡大であることは容易に示すことができる。後はこの Λ' が (P) を満たすことを確かめれば、 (M^*, Λ^*) の極大性に矛盾し、証明が完成する。

そこで $h \in M'$ かつ $h \geq 0$ であるとする。 $h - ag \in M^*$ となる $a \in \mathbb{R}$ を取る。 $a = 0$ ならば $h \in M^*$ なので $\Lambda'(h) \geq 0$ である。次に $a > 0$ とすると、 $\frac{1}{a}h = k$ とすれば、 $k \geq 0$ かつ $k - g \in M^*$ となる。このとき $g - k \leq g$ なので $\Lambda^*(g - k) \leq s$ を得るが、これは $\Lambda^*(k - g) \geq -s$ を意味する。よって

$$\Lambda'(k) = \Lambda^*(k - g) + s \geq -s + s = 0$$

を得るが、ここから $\Lambda'(h) = a\Lambda'(k) \geq 0$ が得られる。最後に $a < 0$ としよう。 $-\frac{1}{a}h = k$ とする。 $k \geq 0$ かつ $k + g \in M^*$ である。これは $k + g \geq g$ を意味する。 $\ell \in M^*$ が $\ell \leq g$ を満たせば $k + g - \ell \geq 0$ であるから、 $\Lambda^*(k + g) \geq \Lambda^*(\ell)$ である。左辺を ℓ について上限を取れば $\Lambda^*(k + g) \geq s$ を得る。よって、

$$\Lambda'(k) = \Lambda^*(k + g) - s \geq s - s = 0$$

となる。これは $\Lambda'(h) = -a\Lambda(k) \geq 0$ を意味する。以上で証明が完成した。

- (2) ヒントにある Λ が条件 (P) を満たすことについては特に問題ないであろう。一方で $f_n = 1_{[1/n, 1]}$ とすれば

$$\Lambda(f_n) = \int_{1/n}^1 \frac{1}{x} dx = \log n \rightarrow \infty$$

が得られる。もし Λ が $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上に (P) を満たしたまま拡張できるならば、 $g_n = 1 - f_n$ としたとき、 $g_n \geq 0$ であるため $\Lambda(g_n) \geq 0$ でなければならないが、一方で

$$\Lambda(g_n) = \Lambda(1) - \Lambda(f_n) \rightarrow -\infty$$

となって矛盾が生ずる。

問題 3 3 : ヒントの通りに Λ_n 、 M 、 p を定義する。 Λ_n が線形であること、 M が非空な線形空間になることは容易に確認できる。 p については、 $t \geq 0$ とすれば

$$\begin{aligned} p(tx) &= \limsup_n \Lambda_n tx = t \limsup_n \Lambda_n x = tp(x) \\ p(x+y) &= \limsup_n \Lambda_n(x+y) = \limsup_n (\Lambda_n x + \Lambda_n y) \\ &\leq \limsup_n \Lambda_n x + \limsup_n \Lambda_n y = p(x) + p(y) \end{aligned}$$

である。また M 内では

$$\Lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n x = p(x)$$

となる。以上から、定理 3.12 が適用できる条件が揃っているため、この Λ は $\Lambda(x) \leq p(x)$ を保ったまま全空間に拡大できる。この Λ が (i)(ii)(iii) の条件を満たすことを確かめればよい。まずは (i) について。これは、

$$\Lambda_n(x - \tau x) = \frac{x(1) - x(n+1)}{n} \rightarrow 0$$

より、 $x - \tau x \in M$ であり、定義から

$$\Lambda(x - \tau x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(x - \tau x) = 0$$

となって、(i) が得られる。

(ii) について。 $\liminf_n x = -\limsup_n -x = -p(-x)$ であるから、

$$\liminf_n x = -p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x) \leq p(x) = \limsup_n x$$

となる。

(iii) について。(ii) から $\|\Lambda\| \leq 1$ が得られる。次に $e \in M$ であるため、定義から $\Lambda(e) = \lim_n \Lambda_n(e) = 1$ であり、よって $\|\Lambda\| = 1$ となる。

問題 3 4 : 答えが書いてある。

問題 3 5 :

(1) ヘルダーの不等式からただちに示される。

(2) $\|e_n\| = 1$ より $|y_n| = |\Lambda(e_n)| \leq \|\Lambda\|$ となる。

- (3) M は、ある N 以降すべて 0 になるような数列の集合と一致する。したがってそのような x に対して

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^N x_n \Lambda(e_n) = \sum_{n=1}^N x_n y_n = \Lambda_y(x)$$

となる。

- (4) $x \in l_1$ に対して、 $n+1$ 以降を 0 に置き換えた数列を x^n とすれば、 $x^n \in M$ である。一方、

$$\|x - x^n\|_1 = \sum_{m=n+1}^{\infty} |x_m| \rightarrow 0$$

であるため、 (x^n) は l_1 ノルムについて x に収束する。

- (5) (1) より Λ_y は M 上で Λ と等しく、また Λ_y は (1) で示したように $\|y\|_{\infty}$ をリップシッツ定数として持ったため、一様連続である。よって定理 2.20 が適用できて、 Λ_y は Λ と l_1 上で等しくなければならない。
- (6) $\|y\|_{\infty} \geq \|\Lambda_y\|$ は (1) から、 $\|\Lambda\| \geq \|y\|_{\infty}$ は (2) からわかる。しかし $\Lambda = \Lambda_y$ であるため、 $\|y\|_{\infty} = \|\Lambda\|$ が導かれる。
- (7) 上で示した (2) のように y を定めればよい。これが全単射であることを示すのは簡単であり、また等長性は (6) で示されている。

問題 36 :

- (i) ベールのカテゴリー定理によって $Y = T(X)$ は第二類の集合であるから、開写像定理によって T は開写像である。
- (ii) 定理 2.14 から、全単射で連続な開写像は位相同型写像であるため、 T^{-1} は連続である。
- (iii) $X = \{0\}$ であれば a, b は任意の正の実数でよい。そこでそうでないと仮定する。 T は線形であるから $T(0) = 0$ であり、 T は単射であるから $Tx \neq 0$ となる $x \in X$ が存在する。これは $\|T\| > 0$ を意味する。よって $b = \|T\|$ とする。次に $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\| \|T(x)\|$ であるから、 $a = \|T^{-1}\|^{-1}$ とする。これらの a, b が要件を満たす。
- (iv) $\mathcal{T}_2$ の下での X から $\mathcal{T}_1$ の下での X への写像として恒等写像 I を考えたとき、 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ であるから I は連続であり、また全単射であるから、(ii) によって I は位相同型写像であり、したがって $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ となる。

問題 37 : 答えが書いてあるが、一応丁寧に確認する。まず $z \in Z$ に対して、 $T(x) = z$ となる $x \in X$ をひとつ取り、これに対する $S(x)$ の値を $U(z)$ と定義する。この定義がきちんとしたものであることを示すために、 $x_1, x_2 \in X$ で、 $T(x_1) = T(x_2) = z$ であるとする。このとき、 $x_1 - x_2 \in \text{Ker } T \subset \text{Ker } S$ であることから、 $S(x_1) = S(x_2)$ であり、よって x_1 と x_2 のどちらを使っても $U(z)$ の定義には変化がない。したがってたしかに U はきちんと定義されている。次に、 $z, w \in Z$ で、 $a, b \in \mathbb{R}$ であるとする、 $z = T(x), w = T(v)$ となる $x, v \in X$ を取ったとき、

$$T(ax + bv) = aT(x) + bT(v) = az + bw$$

となることから、

$$U(az + bw) = S(ax + bv) = aS(x) + bS(v) = aU(z) + bU(w)$$

となって、 U の線形性が示された。 U の連続性についてはヒントの通りでよい。

問題 38 : ヒントに書かれているように、 $\varepsilon = 1$ とセットすると、 T が開写像であることからある $\delta > 0$ について $\|y\| < \delta$ ならば必ず $y = Tx$ かつ $\|x\| < 1$ となる $x \in X$ が存在する。そこで $y \in Y$ を任意に選んだとき、 $y \neq 0$ であるならば、 $C = \frac{2}{\delta}$ に対して $z = \frac{1}{C\|y\|}y$ とすれば $\|z\| < \delta$ であるから、ある $w \in X$ に対して $\|w\| < 1$ かつ $Tw = z$ となる。このとき $x = C\|y\|w$ とすれば、

$$Tx = C\|y\|Tw = C\|y\|z = y$$

となる。さらに、

$$\|x\| = C\|y\|\|w\| < C\|y\|$$

となる。以上は $y \neq 0$ を仮定して示されたのであるが、 $y = 0$ の場合には $T(0) = 0$ であり、 $\|0\| \leq C\|y\|$ は明らかである。よってこの C が題意を満たす。

問題 39 : まず (x_n) が $x \in X$ に収束していると仮定する。背理法の仮定として、 $y_n = f(x_n)$ が $f(x)$ に収束しないと仮定する。するとある $r > 0$ と部分列 $y_{k(n)}$ が存在して、 $\|y_{k(n)} - f(x)\| \geq r$ が常に成り立つようにできる。したがって $y_{k(n)}$ のいかなる部分列も $f(x)$ には収束しない。一方、 K はコンパクトなので $y_{k(n)}$ は収束部分列 $y_{l(n)}$ を持つ。このとき $(x_{l(n)}, y_{l(n)})$ は収束するが、 f のグラフが閉であるから収束先は $(x, f(x))$ でなければならない、矛盾が生じる。

反例については本文で上がっている。

問題 4 0 : 答えが書いてある。

問題 4 1 : 答えが書いてあるがいちおう詳細に追ってみる。

(i) を仮定し、 $y \in T(X)$ とする。このとき、 $Tx = y$ となる x が存在する。 $y' \in \text{Ker } T'$ とすると、 $T'y' = 0$ であるから、 $y'y = y'Tx = (T'y')(x) = 0$ を得る。故に $y \in (\text{Ker } T')^\perp$ となる。逆に $y \in (\text{Ker } T')^\perp$ とし、 $y \notin T(X)$ であるとしよう。(i) と系 3.5 から、 $\Lambda y > 1$ で、かつすべての $x \in X$ に対して $\Lambda(Tx) = 0$ を満たす $\Lambda \in Y'$ が存在する。このとき $T'\Lambda = 0$ となるため $\Lambda \in \text{Ker } T'$ であるが、すると $\Lambda y = 0$ となってしまう、矛盾が生ずる。よって $T(X) = (\text{Ker } T')^\perp$ となり、(ii) が示される。

次に (ii) が成り立つとする。 y_n は $T(X)$ の点列で、 $y \in Y$ に収束すると仮定しよう。また、 $y' \in \text{Ker } T'$ を任意にひとつ取る。このとき、 $y'y_n = 0$ であるから、 y' の連続性によって $y'y = 0$ を得る。これは $y \in (\text{Ker } T')^\perp = T(X)$ を意味し、したがって $T(X)$ は閉でなければならない。以上で証明が完成した。

問題 4 2 : 答えが書いてあるが、一応解説だけすると、

$$y = (0, \dots, 0, z_1, z_2, \dots)$$

とし、ただし最初の 0 は $n - 1$ 個とすると、

$$(T'z)x = \langle z, Tx \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} z_m x_{n+m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} y_m x_m = \langle y, x \rangle$$

となるので、 $T'z = y$ を得る。

問題 4 3 : (本では右分配法則しか仮定していないが、左分配法則を追加して仮定しないとこの証明はうまくいかないように思えるので、以降の問題ではそれを仮定して議論する。)

1 について。 (x_n, y_n) は $U \times U$ 内の点列とし、 (x, y) に収束しているものとする。このとき、 (y_n) は y に収束するので、有界である。したがってその上界を M として、

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &\leq \|x_n y_n - x y_n\| + \|x y_n - xy\| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \\ &\leq \|x_n - x\| M + \|x\| \|y_n - y\| \end{aligned}$$

であるため、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy$ を得る。

2 について。 $x, y \in \text{cl } M$ とする。このとき x_n, y_n という M 内の点列で x, y に収束するものが存在する。すると、

$$ax + by = \lim_n (ax_n + by_n)$$

$$xy = \lim_n (x_n y_n)$$

であるから、 $ax + by, xy \in \text{cl.}M$ となる。

問題 4 4 : 主張が正しくないように思えるので、適宜修正する。

- (1) L_x が線形であることは明らか。次に $\|L_x(y)\| = \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ より、 $\|L_x\| \leq \|x\|$ となる。最後に、 $L_e(y) = y$ なので、 $L_e = I$ である。
- (2) イ. について。任意の $z \in U$ に対して、

$$\tau(ax+by)(z) = L_{ax+by}(z) = (ax+by)z = axz+byz = aL_xz+bL_yz = (a\tau(x)+b\tau(y))(z)$$

であるから、正しい。

ロ. について。任意の $z \in U$ に対して、

$$\tau(xy)(z) = L_{xy}(z) = xyz = L_x(yz) = L_xL_y(z) = \tau(x)\tau(y)(z)$$

であるから、正しい。

ハ. について。全射性は明白であるから、単射性のみ示す。 $x \in U$ に対して、

$$\tau(x) = 0$$

が成り立っていると仮定する。すると

$$0 = \tau(x)(e) = xe = x$$

である。これは $\text{Ker } \tau = \{0\}$ を意味するため、 τ は単射である。

- (3) まず、(1) から

$$\|\tau(x)\| = \|L_x\| \leq \|x\|$$

がわかる。よって $\|\tau\| \leq 1$ 。したがって τ は連続である。故に τ のグラフは閉集合であるが、このとき τ^{-1} のグラフも閉であり、したがって τ^{-1} は閉グラフ定理から連続である。

問題 4 5 :

- (1) x_n は $[0, 1]$ の点列で、 x に収束していると仮定する。このとき

$$Tf(x_n) = \int_0^1 K(x_n, y)f(y)dy$$

であるが、被積分関数 $g_n(y) = K(x_n, y)f(y)$ は $g(y) = K(x, y)f(y)$ に各点収束する。 $[0, 1] \times [0, 1]$ は有界なので上限ノルムの値 $\|K\|$ は有限で、よって $\|g_n\| \leq \|K\| \|f\|$ である。有界収束定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T f(x_n) = T f(x)$$

を得る。

(2) このとき、

$$|T f(x)| = \left| \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \right| \leq \|K\| \|f\|$$

であるから、 $\|T f\| \leq \|K\| \|f\|$ が示される。これは T による単位球の像が一様有界であることを意味する。

次に、 $\varepsilon > 0$ を任意にひとつ固定する。 $x_0 \in [0, 1]$ とし、 $\|f\| \leq 1$ であるとしよう。すると、

$$\begin{aligned} |T f(x) - T f(x_0)| &= \left| \int_0^1 (K(x, y) - K(x_0, y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, y) - K(x_0, y)| dy \end{aligned}$$

となる。 K は $[0, 1] \times [0, 1]$ 内で連続なので一様連続であり、したがってある $\delta > 0$ が存在して、

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |K(x, y) - K(x_0, y)| < \varepsilon$$

となる。すると

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |T f(x) - T f(x_0)| < \varepsilon$$

である。以上の事実は、 T による単位球の像が同程度連続であることを示している。したがって定理 3.21 によって主張は正しい。

問題 4 6：まず最初に、各点で f_n の値が 0 に収束することを示す。 $t = 0$ のとき、 $f_n(0) = 0$ である。次に $t > 0$ とする。

$$g(x) = x^{1/2}$$

と置いたとき、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$$

であることに注意すれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して n が十分大きいならば、任意の $x \geq 4n^2\pi^2$ に対して $0 < g'(x) < \frac{\varepsilon}{t}$ となる。 $\varepsilon < 1$ ならば $\sin(\varepsilon) < \varepsilon$ であり、また $\sin$ は $(0, \varepsilon)$ 上で増加関数であるから、

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin \sqrt{t + 4n^2\pi^2} = \sin(\sqrt{t + 4n^2\pi^2} - 2n\pi) \\ &= \sin(g(t + 4n^2\pi^2) - g(4n^2\pi^2)) = \sin\left(\int_0^t g'(s + 4n^2\pi^2)ds\right) \\ &< \sin \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

となる。以上から、 $n \rightarrow \infty$ のときに $f_n(t) \rightarrow 0$ となる。

次に、 (f_n) が同程度連続であることを示す。このためには、

$$f'_n(t) = \cos \sqrt{t + 4n^2\pi^2} \times g'(t + 4n^2\pi^2)$$

であるから、

$$|f'_n(t)| \leq g'(2\pi)$$

を得る。以上から、 f_n は共通リプシッツ定数 $L = g'(2\pi)$ を持つため、たしかに f は同程度連続である。

最後に相対コンパクトでないことについて。元々の点列 (f_n) の任意の部分列について、それがどこかの関数に一様収束していたとすれば、各点収束もしているため、収束先は 0 でなければならない。ところがすべての n について $\|f_n\| = 1$ であるから、それはありえない。

問題 47：連続な g, h に対しての $g(x)h(y)$ の有限和で書ける関数の全体を F と置く。容易にわかるように、この F は $C(X \times Y, \mathbb{R})$ の部分代数を成す。さらに $(x, y) \neq (z, w)$ とすれば、補題 2.1 から $g(x) = 1, g(z) = 0$ となる連続関数 g と $h(y) = 1, h(w) = 0$ となる連続関数 h が存在する。このとき $g(x)h(y) = 1$ かつ $g(z)h(w) = 0$ であるため、 F は二点を分離する。明らかに恒等的に 1 に等しい関数は F に含まれるため、定理 3.23 により $\text{cl}.F = C(X \times Y, \mathbb{R})$ が示される。