

第四章

問題の前に、便利な補題をいくつか示しておく。これらはすべて、問題を解くために必要になるものである。

補題 1. 線形位相空間 X において、 V が開であれば、 $x + V$ も開である。また、 F が閉であれば、 $x + F$ も閉である。

証明. まず、 $f : y \mapsto (-x, y)$ が連続であることを示す。このために、 $(-x, y)$ の任意の近傍 U を取る。直積位相の性質から、 U は $(-x, y)$ を含む初等集合 $U_1 \times U_2$ を含む。すると $y' \in U_2$ ならば $f(y') \in U$ である。これは f が連続であることを意味する。また、線形位相空間であるから $g : (x, y) \mapsto x + y$ も連続であり、したがって $h = g \circ f$ は連続である。よって $x + V = h^{-1}(V)$ は開であり、また $x + F = h^{-1}(F)$ は閉である。以上で証明が完成した。 ■

補題 2. 線形位相空間 X において、 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であるとすれば、 V が開のとき αV も開である。また、 F が閉のとき αF も閉である。

証明. まず、 $f : x \mapsto (\alpha^{-1}, x)$ が連続であることを示す。そのために、 (α^{-1}, x) の任意の近傍 U を取る。直積位相の性質から、 U は (α^{-1}, x) を含む初等集合 $U_1 \times U_2$ を含む。すると $y \in U_2$ ならば $f(y) \in U$ となる。したがって f は連続である。線形位相空間であるから $g : (a, x) \mapsto ax$ も連続であり、したがって $h = g \circ f$ も連続である。よって $\alpha V = h^{-1}(V)$ は開であり、また $\alpha F = h^{-1}(F)$ は閉である。以上で証明が完成した。 ■

補題 3. 線形位相空間 X の線形部分空間 M に対して、 $\text{cl.}M$ は線形部分空間である。

証明. まず、 $x \in \text{cl.}M$ と $a \in \mathbb{R}$ を任意に取る。 $a = 0$ ならば、 $ax = 0 \in M$ である。 $a \neq 0$ ならば、 $ax \in U$ となる任意の開集合に対して $x \in \frac{1}{a}U$ である。補題 2 から $y \in \frac{1}{a}U \cap M$ が存在するが、このとき $ay \in U \cap M$ である。よって $ax \in \text{cl.}M$ となる。

次に $x, y \in \text{cl.}M$ とし、 $x + y$ の任意の近傍 U を取る。このとき補題 1 によって $V = -(x + y) + U$ は 0 の近傍である。ここで、 $f(x, y) = x + y$ は連続であったから、 $f^{-1}(V)$ は X^2 における $(0, 0)$ の開近傍である。直積位相の性質から、それは $(0, 0)$ を含む初等集合 $U_1 \times U_2$ を含む。 $W = U_1 \cap U_2$ とすれば、それは 0 の近傍であり、 $a, b \in W$ に対して $a + b \in V$ を満たす。

そこで、 $W_1 = x + W$ と $W_2 = y + W$ を考える。ふたたび補題 1 から W_1, W_2 は開であり、したがって $x' \in W_1 \cap M$ と $y' \in W_2 \cap M$ が存在するが、このとき $x' + y' \in U \cap M$

である。よって $x + y \in \text{cl}.M$ となる。以上で証明が完成した。 ■

問題 1 : 記号の節約のために、以下では z という記号はある $t \in [0, 1]$ に対して $z = (1 - t)x + ty$ を満たすベクトルを表すとして議論を進める。なお、例 1 は簡単すぎるため省略する。

例 2 : $x, y \in B_r(0)$ であれば、

$$\|z\| = \|(1 - t)x + ty\| \leq (1 - t)\|x\| + t\|y\| < (1 - t)r + tr = r$$

であるから $z \in B_r(0)$ 。

例 3 : $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$ ならば、任意の座標 $i \in \{1, \dots, \ell\}$ について

$$z^i = (1 - t)x^i + ty^i \geq 0$$

であるから $z \in \mathbb{R}_+$ である。

例 4 : $x, y \in \Lambda_\ell$ ならば $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$ なので、例 3 から $z \in \mathbb{R}_+^\ell$ である。さらに、

$$\sum_{i=1}^{\ell} z^i = (1 - t) \sum_{i=1}^{\ell} x^i + t \sum_{i=1}^{\ell} y^i = 1$$

であるため、 $z \in \Lambda_\ell$ を得る。

例 5 : $Ax = Ay$ であれば、

$$Az = (1 - t)Ax + tAy = Ax$$

である。

例 6 : $p(x) \leq r$ かつ $p(y) \leq r$ であれば、

$$p(z) = p((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)p(x) + tp(y) \leq r$$

である。

例 7 : $x, y \in C$ とし、 $v = Tx, w = Ty$ とすれば

$$(1 - t)v + tw = (1 - t)Tx + tTy = Tz$$

である。 C は凸であるから $z \in C$ であり、したがって $tv + (1 - t)w \in T(C)$ となる。

問題 2 :

- (i) $c_1, c_2 \in A + B$ とし、対応して $c_1 = a_1 + b_1, c_2 = a_2 + b_2, a_i \in A, b_i \in B$ とすれば、 $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$(1-t)c_1 + tc_2 = [(1-t)a_1 + ta_2] + [(1-t)b_1 + tb_2] \in A + B$$

となる。

- (ii) $\alpha = 0$ なら $\alpha A = \{0\}$ は凸である。一方、 $\alpha \neq 0$ であるとすれば、 $a, b \in \alpha A$ のときには $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$(1-t)a + tb = \alpha \left((1-t) \cdot \frac{1}{\alpha} a + t \cdot \frac{1}{\alpha} b \right) \in \alpha A$$

となる。

- (iii) $a, b \in \cap_{\lambda} A_{\lambda}$ とする。すると任意の λ に対して $a, b \in A_{\lambda}$ であるから、 $0 \leq t \leq 1$ に対して

$$(1-t)a + tb \in A_{\lambda}$$

となり、したがって $ta + (1-t)b \in \cap_{\lambda} A_{\lambda}$ を得る。

問題 3 : (i) と (ii) の同値性は明白である。

(iii) を仮定すれば明らかに (ii) が導かれる。一方、 $a \in A$ とすれば $a = \psi(a, a, 0)$ なので、(ii) は (iii) を含意する。よって (ii) と (iii) も同値である。

(iv) を仮定すれば、 A の二個の点の凸結合の全体である $\phi(A \times A \times [0, 1])$ は A に含まれ、よって (ii) が成り立つ。逆に (i) を仮定しよう。 $a = \sum_{i=1}^n c_i a_i$ とし、ただし $a_1, \dots, a_n \in A$ で、かつ $c_i \geq 0$ で $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ とする。 $a \in A$ が示されれば (iv) が示せて証明が完成するので、それが我々の目標である。証明は n についての数学的帰納法による。 $n = 2$ の場合、上で述べたようにこの主張は (ii) と同値である。 $n = k-1$ まで主張が正しかったと仮定する。どれかひとつでも $c_i = 0$ となる i があれば $k-1$ の場合に還元できるから、 $c_1, \dots, c_k$ はどれも 0 ではないと仮定できる。そこで特に $1 - c_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i > 0$ であるから、 $d_i = \frac{c_i}{1-c_k}$ と定義すると、

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i = \frac{1}{1-c_k} \sum_{i=1}^{k-1} c_i = 1$$

となるため、帰納法の仮定から

$$b \equiv \sum_{i=1}^{k-1} d_i a_i \in A$$

となる。よって A の属性により、

$$a = \sum_{i=1}^k c_i a_i = (1 - c_k)b + c_k a_k \in A$$

となって証明が完成する。

問題 4 の前に、定理 4.2 下の脚注について検証する。

(i) について。 $\text{cl.}(A \times A \times [0, 1]) = (\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$ が成り立つことを示せば後はそのままよい。そこでこれを示す。

$$A \times A \times [0, 1] \subset (\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$$

は明らかである。次に、空間 $X \times X \times [0, 1]$ において、 $(\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$ の補集合は次の二つの集合 $(\text{cl.}A)^c \times X \times [0, 1]$, $X \times (\text{cl.}A)^c \times [0, 1]$ の合併となっており、これは開集合である。よって $(\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$ は閉集合である。以上から

$$\text{cl.}(A \times A \times [0, 1]) \subset (\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$$

が示された。逆に、 $(a, b, t) \in (\text{cl.}A) \times (\text{cl.}A) \times [0, 1]$ とし、 U をその近傍としよう。直積位相の定義から、 $a \in V_1$ となる X の開集合 V_1 、 $b \in V_2$ となる X の開集合 V_2 、 $t \in V_3$ となる $[0, 1]$ の開集合 V_3 が存在して、 $V_1 \times V_2 \times V_3 \in U$ となる。このとき、 $V_1 \cap A \neq \emptyset$ であり、 $V_2 \cap A \neq \emptyset$ であり、 $V_3 \cap [0, 1] \neq \emptyset$ であるから、 $U \cap (A \times A \times [0, 1]) \neq \emptyset$ となる。したがって $(a, b, t) \in \text{cl.}(A \times A \times [0, 1])$ である。以上で主張が示された。

(ii) が (iii) の系であることは明らかである。そこで (iii) であるが、本文でのギャップは補題 1 だけで十分に埋められるであろうから省略する。

問題 4 : 1 について。まず、 A を含むすべての凸集合の共通部分を B とすると、定理 4.1 の (iii) から B は凸である。明らかに B は A を含むどの凸集合にも含まれるので、 B は A を含む最小の凸集合であり、よって $\text{co}A$ と等しい。以上から、 $\text{co}A$ が必ず存在すること、および (i) が示された。

次に、 A を含むすべての閉凸集合の共通部分を C とすると、これが閉凸であることは定理 4.1(iii) と閉集合の性質からわかる。したがってそれは A を含む閉凸集合すべてに含まれており、よって C は A を含む最小の閉凸集合で、故に $\overline{\text{co}}A$ と等しい。以上から、 $\overline{\text{co}}A$ の存在と (ii) が示された。

2 について。(i) に関しては、式の右辺の集合を B と書くことにする。 $x, y \in B$ なら

ば、 $\lambda, \mu \in \Lambda_p$ となるような λ, μ をうまく取って、

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda^i x_i, y = \sum_{i=1}^p \mu^i x_i$$

と書ける。このとき、 $t \in [0, 1]$ ならば、

$$tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^p (t\lambda_i + (1-t)\mu_i)x_i$$

である。 Λ_p は凸なので、 $tx + (1-t)y \in B$ となる。よって B は凸であることがわかった。明らかに $A \subset B$ なので $\text{co}A \subset B$ となるが、一方で $\text{co}A$ は補題 4.1 の (iv) から B を含み、よってこの二つは一致する。これで (i) が示せた。

(ii) について。今度は右辺の集合を C と書く。 B を A の有限部分集合とすれば、 $\text{co}A$ は A を含む凸集合であり、したがって B を含む。故に $\text{co}B \subset \text{co}A$ であり、 B は任意だったので $C \subset \text{co}A$ を得る。次に、 C は明らかに A を含む。また、 $x, y \in C$ とすれば、 B_1, B_2 という A の有限部分集合が存在して $x \in \text{co}B_1$ かつ $y \in \text{co}B_2$ となることになるが、このとき $t \in [0, 1]$ ならば $tx + (1-t)y \in \text{co}(B_1 \cup B_2) \subset C$ である。以上から C は凸であり、 A を含むので、 $\text{co}A$ を含む。よって両者は一致する。これで (ii) が示された。

問題 5 : $x = \sum_{i=1}^p c_i x_i$ とし、 $x_i = \sum_{j=1}^{n(i)} d_{ij} y_{ij}$ として、ただし $c_i, d_{ij} \geq 0$ で、かつ

$$\sum_{i=1}^p c_i = 1, \sum_{j=1}^{n(i)} d_{ij} = 1$$

とする。このとき、 $e_{ij} c_i d_{ij}$ とすれば $e_{ij} \geq 0$ で、

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n(i)} e_{ij} = \sum_{i=1}^p c_i \sum_{j=1}^{n(i)} d_{ij} = \sum_{i=1}^p c_i = 1$$

である。そして、

$$x = \sum_{i=1}^p c_i x_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n(i)} c_i d_{ij} y_{ij} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n(i)} e_{ij} y_{ij}$$

となるため、主張は正しい。

問題 6 : 右辺を A と書くことにする。まず、 $\text{co}(C_1 \cup C_2)$ は C_1 と C_2 を含む凸集合であるから、任意の $t \in [0, 1]$ と $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ に対して $(1-t)x_1 + tx_2 \in \text{co}(C_1 \cup C_2)$ で

なければならない。これは $A \subset \text{co}(C_1 \cup C_2)$ を意味する。一方、 A は C_1 と C_2 を含むから $C_1 \cup C_2$ を含む。したがって $\text{co}(C_1 \cup C_2) \subset A$ を示すためには、 A が凸集合でさえあればよいことがわかる。これが証明の目標である。

そこで、 $z_1, z_2 \in A$ かつ $s \in [0, 1]$ であるとし、 $z = (1-s)z_1 + sz_2$ としよう。ここで、 $z_i = (1-t_i)x_i + t_iy_i$ となる $x_i \in C_1, y_i \in C_2, t_i \in [0, 1]$ を取る。 $s = 0$ ならば $z = z_1 \in C_1$ であり、 $s = 1$ ならば $z = z_2 \in C_2$ となるため、 $0 < s < 1$ のときだけを考える。また、 t_1, t_2 のいずれもが $0, 1$ のどちらかである場合も明らかに $z \in A$ となるため、 $0 < t_1 < 1$ か $0 < t_2 < 1$ のどちらかが成り立つと仮定する。このとき、

$$u_1 = (1-s)(1-t_1) + s(1-t_2), \quad u_2 = (1-s)t_1 + st_2,$$

$$v_1 = \frac{s(1-t_2)}{(1-s)(1-t_1) + s(1-t_2)}, \quad v_2 = \frac{st_2}{(1-s)t_1 + st_2}$$

とすると、 $u_1, u_2 > 0$ かつ $u_1 + u_2 = 1$ であり、よって v_1, v_2 はきちんと定義され、 $[0, 1]$ に属する。さらに

$$\begin{aligned} z &= (1-s)z_1 + sz_2 = (1-s)(1-t_1)x_1 + s(1-t_2)x_2 + (1-s)t_1y_1 + st_2y_2 \\ &= u_1((1-v_1)x_1 + v_1x_2) + u_2((1-v_2)y_1 + v_2y_2) \end{aligned}$$

となるため、 $z \in A$ である。よってたしかに A は凸集合であり、したがって $\text{co}(C_1 \cup C_2)$ を含む。以上で証明が完成した。

問題 7 : M が凸錘で、 $x_1, x_2 \in M$ とする。このとき

$$x_1 + x_2 = 2\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \in M$$

が導かれる。

逆に、 M が錘で、 $x_1, x_2 \in M$ ならば $x_1 + x_2 \in M$ であると仮定する。 $x_1, x_2 \in M$ と $t \in [0, 1]$ を取ると、 $(1-t)x_1, tx_2 \in M$ であるから、

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in M$$

が成り立ち、 M の凸性が示される。

問題 8 の前に、定理 4.3 の証明が微妙な部分を含むので、少し補足しておく。

まずは (i) について、示されていない $\text{co}(\alpha A) = \alpha \text{co}A$ を示す。まず $\alpha \text{co}A$ が凸であることは定理 4.1 の (ii) から示される。また、 $\alpha \text{co}A$ は αA を含み、故に $\text{co}(\alpha A)$ を含む。一方、 $a \in \alpha \text{co}A$ として、 $a = \alpha b$ となる $b \in \text{co}A$ を取る。このとき 178 ページの事実

2 (ii) から、 A の有限部分集合 $B = \{a_1, \dots, a_p\}$ が存在して、 $b \in \text{co}B$ である。事実 2 (i) から、ある $c_1, \dots, c_p \geq 0$ に対して $\sum_{i=1}^p c_i = 1$ かつ $b = \sum_{i=1}^p c_i x_i$ であり、よって $a = \sum_{i=1}^p c_i (\alpha x_i) \in \text{co}(\alpha A)$ が導かれる。以上で $\alpha \text{co}A = \text{co}(\alpha A)$ が示せた。

(ii) について。多くの書籍で線形位相空間はハウスドルフであると仮定されるが、本書ではそれが仮定されていない。この (ii) の主張は位相がハウスドルフでない線形空間では反例が出ることを最初に指摘しておく。反例としては、 $\mathbb{R}$ に密着位相を入れたものを考えればよい。この位相については加法もスカラー倍も連続であるが、 $\alpha = 0$ のとき任意の非空集合 A について

$$\overline{\text{co}}(\alpha A) = X \neq \{0\} = \alpha \overline{\text{co}}A$$

となって、二番目の主張が成り立たない。空間がハウスドルフであれば $\{0\}$ が閉集合になるのでこのようなことは決して起こらない。そこで、ここでは $\alpha \neq 0$ を追加的に仮定すれば (ii) が正しいことを示す。ここからただちに、ハウスドルフ線形位相空間ではこのような反例がないことがわかる。

最初の主張である $\overline{\text{co}}A = \text{cl.}(\text{co}A)$ の証明に問題はないので、二番目の主張である $\overline{\text{co}}(\alpha A) = \alpha \overline{\text{co}}A$ だけを証明する。記号の節約のため左辺を B 、右辺を C と書く。 $\alpha \neq 0$ なので我々の補題 2 によって C は閉であり、また定理 4.1(ii) から凸でもある。 $\alpha \text{co}A \subset C$ も明らかなので、 $B \subset C$ は示せた。

逆に、 $x \in C$ としよう。このとき $x = \alpha y$ となる $y \in \overline{\text{co}}A$ が存在するが、すでに述べたように $\overline{\text{co}}A = \text{cl.}(\text{co}A)$ であるため、 $y \in \text{cl.}(\text{co}A)$ となる。そこで x の近傍 U が任意に与えられたとき、補題 2 によって $\frac{1}{\alpha}U$ は y の近傍であり、したがって $\frac{1}{\alpha}U$ は $\text{co}A$ の要素を含む。故に U は $\alpha \text{co}A$ の要素を含むが、これは $x \in B$ を意味する。よって $C \subset B$ であり、以上で主張が示された。

問題 8：答えが書いてある。

問題 9：(完全には解けなかった。非有界性だけ証明を書いておく。) まず三角不等式について簡単に確認しておこう。 $a, b \geq 0$ のとき、 $f(x) = x^p$ とすれば、 $x > 0$ のとき必ず $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ となることから、

$$\begin{aligned} (a+b)^p - a^p &= f(a+b) - f(a) = \int_0^b f'(a+x)dx \\ &\leq \int_0^b f'(x)dx = f(b) - f(0) = b^p \end{aligned}$$

となるため、整理して

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p$$

を得る。これで示された。

次に、 ℓ_p の非空凸開集合 U を任意に取り、 $x \in U$ とする。必要ならば U を $U - x$ と取り替えることで、 $0 \in U$ を仮定してよい。 $y \in \ell_p$ を任意に取る。 U は開集合なので、 $B_r(0) \subset U$ となる $r > 0$ が存在する。このとき、 $e_n^n = 1$ とし、また $n \neq m$ ならば $e_m^n = 0$ とする。すると $0 < \delta^p < r$ となる δ に対して $\delta e^n \in B_r(0) \subset U$ となる。ここで与えられた N に対して

$$x^N = \sum_{n=1}^N \frac{\delta}{N} e^n$$

と定義すると、 U の凸性から $x^N \in U$ である。一方、

$$[x^N] = \sum_{n=1}^N \frac{\delta^p}{N^p} < N^{1-p} \delta^p \rightarrow \infty$$

となるため、 U は非有界である。

問題 10 :

(1) 答えが書いてある。

(2) $p \geq \ell + 2$ より、 $\ell + 1$ 個のベクトルの集合 $\{x_1 - x_p, \dots, x_{p-1} - x_p\}$ は一次従属である。したがってある $\mu_1, \dots, \mu_{p-1}$ について、すべてが 0 でなく、かつ

$$\mu_1(x_1 - x_p) + \dots + \mu_{p-1}(x_{p-1} - x_p) = 0$$

とならなければならない。そこで $i \in \{1, \dots, p-1\}$ に対しては $\lambda_i = \mu_i$ とし、 $\lambda_p = -\sum_{i=1}^{p-1} \mu_i$ とすれば、 $\sum_{i=1}^p \lambda_p = 0$ であり、また

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \mu_1(x_1 - x_p) + \dots + \mu_{p-1}(x_{p-1} - x_p) = 0$$

となって、たしかに M はアフィン従属であることが判明する。(1) によって結論を得る。

問題 11 :

(1) $\sharp A = \ell + 1$ なら結論は自明である。次に $\sharp A \leq n - 1$ のときの結論が正しいと仮定し、 $\sharp A = n$ とする。このとき、 $a \in A$ を任意に取り、

$$B_a = \cap_{b \neq a} C_b$$

と定義すれば、帰納法の仮定から $B_a \neq \emptyset$ である。そこで各 $a \in A$ に対して $b_a \in B_a$ を選ぶ。問題 10 によって、集合 $\{b_a | a \in A\}$ は凸包が共通部分を持つような分割 M_1, M_2 を持つ。 $I_1 = \{a \in A | b_a \in M_1\}$ 、 $I_2 = A \setminus I_1$ とする。 $x \in \text{co}M_1 \cap \text{co}M_2$ を取る。 $a \in I_2$ ならば $M_1 \subset B_a$ であり、 $a \in I_1$ ならば $M_2 \subset B_a$ であるから、 B_a の凸性によって $x \in \bigcap_{a \in A} B_a = \bigcap_{a \in A} C_a$ となる。以上で証明が完成した。

(2) $A_n = [n, +\infty)$ とすればよい。

(3) (1) より、条件 (a) は有限交差性を意味する。ところが、 C_a がコンパクトであるとするれば、 $D_b = C_a \cap C_b$ として

$$\bigcap_b C_b = \bigcap_b D_b$$

である。右辺は有限交差性を満たすコンパクト集合の閉集合族であり、したがって共通部分を有する。

問題 12：ヒントの通りに作った集合 A が凸であることを示そう。まず、 $x, y \in A$ とすれば、条件を満足する t_n^x, t_n^y という数列が存在して、

$$x_n = \frac{t_n^x(n+1)}{n}, \quad y_n = \frac{t_n^y(n+1)}{n}$$

と書ける。すると $t \in [0, 1]$ と $z = (1-t)x + ty$ に対して、

$$t_n^z = (1-t)t_n^x + tt_n^y$$

と置けば

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n^z = 1, \quad t_n^z \geq 0$$

であり、また

$$z_n = \frac{t_n^z(n+1)}{n}$$

となるため、 $z \in A$ となる。よって確かに A は凸である。

次に A が閉であることを示す。このために、 A 上の点列 (x^k) が $x \in \ell_1$ に収束していると仮定する。ここで

$$x_n^k = \frac{t_n^k(n+1)}{n}, \quad x_n = \frac{t_n(n+1)}{n}$$

と仮定しよう。このとき、

$$t_n^k = \frac{n}{n+1} x_n^k \rightarrow \frac{n}{n+1} x_n = t_n$$

となる。一方、明らかに $t_n \geq 0$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ は正項級数であり、よって収束先 α が存在する。もし $\alpha > 1$ ならば、十分大きな N に対して

$$\sum_{n=1}^N t_n > 1$$

となるが、

$$\sum_{n=1}^N t_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N t_n^k \leq 1$$

であるため矛盾が生ずる。逆に $\alpha < 1$ であるとすれば、 $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2}$ とすると、 (x^k) が x に ℓ_1 収束していることから、十分大きく K を取れば $\|x^K - x\|_1 < \varepsilon$ となるが、このとき

$$\varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^K - x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} |t_n^K - t_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n^K - t_n|$$

を得る。すると、

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^K \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n + \sum_{n=1}^{\infty} |t_n^K - t_n| < 1 - 2\varepsilon + \varepsilon < 1$$

となって矛盾が生ずる。故に、 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$ でなければならず、 $x \in A$ となる。これで A が閉であることがわかった。

最後に、 $t_m = 1$ で、かつ $n \neq m$ ならば $t_n = 0$ である数列 (t_n) に対して、ここから生成される A の要素 $x = (x_n)$ は $\|x\|_1 = \frac{m+1}{m}$ を満たす。したがって、

$$\inf_{a \in A} \|a\| \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{m+1}{m} = 1$$

を得る。ところが一方で、任意の $x \in A$ に対して

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{n+1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1$$

となるため、 A と 0 との最短距離になる点は存在しない。

問題 13：ヒントの集合 A が閉凸であることはほぼ明らかなので論証は省略する。一方、 A 内の任意の関数が 0 との最短距離 1 を与える。

問題 14：

- (1) $x \in M$ なら左辺と右辺は明らかに一致するので、 $x \notin M$ と仮定する。 Λ が連続なので、 M は X の閉線形部分空間であるということに注意する。 $y \in M$ に対して、

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(x - y)| \leq \|\Lambda\| \|x - y\|$$

であることから、

$$\inf_{y \in M} \|x - y\| \geq \frac{|\Lambda(x)|}{\|\Lambda\|}$$

を得る。次に、任意の $\varepsilon \in (0, \|\Lambda\|)$ に対して、 $\|z\| = 1$ かつ

$$|\Lambda(z)| \geq \|\Lambda\| - \varepsilon$$

となるような z が存在する。すると、

$$a = \frac{\Lambda(z)}{\Lambda(x)}$$

としたとき、 $a \neq 0$ であり、かつ $ax - z \in M$ となる。そこで

$$\frac{|\Lambda(x)|}{\|\Lambda\| - \varepsilon} \geq \frac{|\Lambda(x)|}{|\Lambda(z)|} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|} \|z\| = \left\| x - \frac{1}{a}(ax - z) \right\|$$

であるから、

$$\frac{|\Lambda(x)|}{\|\Lambda\| - \varepsilon} \geq \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

がわかる。 ε はいくらでも小さく取りうるので、これは

$$\frac{|\Lambda(x)|}{\|\Lambda\|} \geq \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

を意味する。以上で証明が完成した。

- (2) Λ が線形であることは明らかであるため、連続であることだけ確認しよう。実際、 (x^k) が c_0 上の点列で、 $x \in c_0$ に収束していたとする。ここで $\varepsilon > 0$ を任意に取る。 x^k は x に収束しているから、十分大きな K を取れば、 $k \geq K$ のときにはすべての n について $|x_n^k - x_n| < \varepsilon$ が成り立つ。すると、

$$|\Lambda(x^k) - \Lambda(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n^k - x_n| < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon = \varepsilon$$

となる。したがって確かに $\Lambda(x^k) \rightarrow \Lambda(x)$ であり、故に Λ は連続である。

ここで $x \notin M$ であるとし、 $y \in M$ とする。以下、主張を段階的に示していこう^{*1}。

^{*1} おそらく出題者の意図としては (1) を導線として (2) を示してほしいのだと思われるが、その方向の証明を思い浮かばなかった。

ステップ 1. 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、集合

$$\arg \max\{|y_n - x_n| | n \in \mathbb{N}, n \geq N\}$$

は非空集合である。特に、 $y_n \neq x_n$ となる $n \geq N$ が存在するならば、これは有限集合である。

ステップ 1 の証明. 仮に $n \geq N$ のときは常に $y_n = x_n$ とすれば主張は明らかであるため、ある $m \geq N$ について $y_m \neq x_m$ とする。対応して $\varepsilon = |y_m - x_m|$ とすれば、 $x, y \in c_0$ であることからある N_1 が存在して、 $n \geq N_1$ ならば $|y_n - x_n| < \varepsilon$ となる。すると、

$$\sup\{|y_n - x_n| | n \in \mathbb{N}, n \geq N\} = \max\{|y_n - x_n| | n \in \{N, N+1, \dots, N_1-1\}\}$$

となるため、この最大値を達成する n の集合は明らかに非空な有限集合となる。 ■

ステップ 2. 集合

$$I(y) \equiv \arg \max\{|y_n - x_n| | n \in \mathbb{N}\}$$

は有限である。

ステップ 2 の証明. ステップ 1 において $N = 1$ とセットすればよい。 $x \notin M$ であるから $y \neq x$ であり、よって $y_n \neq x_n$ となる $n \geq 1$ は必ず存在する。 ■

ステップ 3. もし $I(y)$ が一点集合ならば、 y は M 内での x との最短距離点ではない。

ステップ 3 の証明. $I(y) = \{m\}$ とする。ステップ 1 の N を $m+1$ にセットすれば、

$$|y_k - x_k| = \max\{|y_n - x_n| | n \in \mathbb{N}, n \geq m+1\}$$

となる $k \geq m+1$ が存在する。そこで

$$\varepsilon \equiv |y_m - x_m| - |y_k - x_k| = \|y - x\|_\infty - \max\{|y_n - x_n| | n \in \mathbb{N}, n > m\} > 0$$

と定義する。 $0 < 2t < \varepsilon$ となる t を取って、

$$z_n = \begin{cases} y_n - \operatorname{sgn}(y_m - x_m)t & \text{if } n = m, \\ y_n + \operatorname{sgn}(y_m - x_m)2t & \text{if } n = m+1, \\ y_n & \text{otherwise,} \end{cases}$$

と定義しよう。明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ であり、また

$$\Lambda(z) = \Lambda(y) + \operatorname{sgn}(y_m - x_m)[-2^{-m}t + 2^{-m-1}(2t)] = \Lambda(y) = 0$$

となるため、 $z \in M$ である。さらに $n \in \{m, m+1\}$ のときには

$$|z_n - x_n| < \|y - x\|_\infty$$

となり、それ以外の

$$|z_n - x_n| = |y_n - x_n| < \|y - x\|_\infty$$

となるから、 $\|z - x\|_\infty < \|y - x\|_\infty$ となる。よってたしかに y は最短距離点ではない。これでステップ 3 の証明が完成した。 ■

ステップ 4. もし $I(y)$ が一点集合でなければ、 $\|y - x\|_\infty = \|z - x\|_\infty$ となる $z \in M$ の中で $I(z)$ の個数が $I(y)$ の個数より少ないものが存在する。

ステップ 4 の証明. $m = \max I(y)$ と置いて、ステップ 3 と同様に z を構成すれば、

$$\|z - x\|_\infty = \|y - x\|_\infty, \quad I(z) = I(y) \setminus \{m\}$$

となるため、ここからただちに結論を得る。 ■

さて、もし y^* が M 内での x との最短距離点であるとすれば、 $I(y^*)$ はステップ 2 から有限集合である。ステップ 4 を有限回利用することで、 $I(y^*)$ は一点集合であると仮定してよい。するとステップ 3 から y^* は M 内での x との最短距離点ではないことになり、矛盾が生ずる。よってこのような y^* は存在しないことがわかった。以上で証明が完成した。

問題 15：最初に、補題 3 によって $\text{cl}.M$ が線形空間であることに注意しておく。

$x \in M, y \in M^\perp$ とすれば、 $\langle x, y \rangle = 0$ となるため、 $x \in (M^\perp)^\perp$ である。よって $M \subset (M^\perp)^\perp$ となる。また、内積の連続性から、任意の線形部分空間 N に対して $N^\perp$ は閉である。ここからただちに $\text{cl}.M \subset (M^\perp)^\perp$ が従う。次に、 $M \subset \text{cl}.M$ であるから、 $(\text{cl}.M)^\perp \subset M^\perp$ であり、したがって $(M^\perp)^\perp \subset ((\text{cl}.M)^\perp)^\perp$ となる。

次に、 M が閉なら $M = (M^\perp)^\perp$ であることを示す。左辺が右辺に含まれることはすでにわかっている。一方、右辺の元 x を取ってくると、定理 4.8 によってそれは $y \in M$ と $z \in M^\perp$ の和として書ける。しかし $x - y = z$ であるから、

$$\|z\|^2 = \langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = 0$$

であり、よって $x = y, z = 0$ を得る。したがって x は左辺に含まれる。以上から、 $(M^\perp)^\perp = \text{cl}.M$ が示せたことになる。

問題 16 :

(1) まず $z_1, z_2 \in H$ とし、 $a, b \in \mathbb{R}$ とする。ここで

$$z_i = x_i + y_i, \quad x_i \in M, y_i \in M^\perp$$

とすると、

$$az_1 + bz_2 = (ax_1 + bx_2) + (ay_1 + by_2)$$

と書け、しかも

$$ax_1 + bx_2 \in M, \quad ay_1 + by_2 \in M^\perp$$

である。表現の一意性から

$$P(az_1 + bz_2) = ax_1 + bx_2 = aP(z_1) + bP(z_2)$$

を得るため、 P は線形である。次に、

$$\|z\|^2 = \|P(z) + (z - P(z))\|^2 = \|P(z)\|^2 + \|z - P(z)\|^2 \geq \|P(z)\|^2$$

より、 $\|P\| \leq 1$ を得る。最後に、 $z \in M$ ならば $P(z) = z$ は明らかであり、したがって $z \in H$ がなんであろうと

$$P^2(z) = P(P(z)) = P(z)$$

を得る。以上で証明が完成した。

(2) (ii) から (i) はノルムの連続性から明白である。

(i) から (ii) についてであるが、どうやら一般論として成り立つようであるものの、証明を構築することが極めて難しかった。本書の著者の『函数解析学』という別の本によれば、射影作用素の条件として書かれている性質に加えて、自己共役性（つまり、共役作用素が自分自身と等しいこと）が仮定されている。ここではその性質を P_n および P への仮定に追加した場合の証明だけを記しておく。

まず、一般論として、

$$\begin{aligned} \langle P_n x, P_n y \rangle &= \frac{1}{4} [\|P_n(x+y)\|^2 - \|P_n(x-y)\|^2] \\ &\rightarrow \frac{1}{4} [\|P(x+y)\|^2 - \|P(x-y)\|^2] = \langle Px, Py \rangle \end{aligned}$$

がわかっている。ここに上で仮定した自己共役性を用いると、固定した $y \in H$ に対して

$$\langle P_n x, y \rangle = \langle P_n^2 x, y \rangle = \langle P_n x, P_n y \rangle \rightarrow \langle Px, Py \rangle = \langle P^2 x, y \rangle = \langle Px, y \rangle$$

となる。つまり、列 $(P_n x)$ は Px に弱収束していることが確認できる。ここからただちに、

$$\begin{aligned}\|P_n x - Px\|^2 &= \|P_n x\|^2 + \|Px\|^2 - 2\langle P_n x, Px \rangle \\ &\rightarrow \|Px\|^2 + \|Px\|^2 - 2\langle Px, Px \rangle = 2\|Px\|^2 - 2\|Px\|^2 = 0\end{aligned}$$

を得て、証明が完成する。以上。

なお、『函数解析学』には、 P が自己共役であることと、ある閉線形部分空間 M に対して (1) の形で定義される P であることの同値性が証明されている。

問題 17 : $x \in H_0$ とすれば $y = x + x^*$ に対して $\langle p, y \rangle = \langle p, x^* \rangle$ となるので、 $y \in H$ となる。逆に $y \in H$ とすれば $x = y - x^*$ について $\langle p, x \rangle = 0$ となるので $x \in H_0$ となる。よって $H = H_0 + x^*$ となる。

問題 18 : 定理 4.12 の (iv) と (iii) の同値性の特殊ケースに過ぎない。

問題 19 : A を含むすべての半空間の共通部分を B とすると、 $A \subset B$ は明らかである。逆に $x \notin A$ であれば、 A 内の x との最短距離点 a を取ってきて、 $H^+ = \{y \in \mathbb{R}^\ell | \langle x - a, y - a \rangle \leq 0\}$ と置けば、最短距離定理によって H^+ は A を含み x を含まない半空間であるため、 $x \notin B$ となる。よって $B \subset A$ となる。

問題 20 : (i) について。 $x \in X$ ならば $x \in M + \mathbb{R}e$ となるため、 $m \in M$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ をうまく取れば $x = m + \lambda e$ となる。一意性を示すために、 $x = m_1 + \lambda_1 e = m_2 + \lambda_2 e$ としてみよう。すると、

$$m_1 - m_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)e$$

である。ここで $m_1 - m_2 \in M$ であるが $e \notin M$ であるから、 $\lambda_1 = \lambda_2$ であり、したがって $m_1 = m_2$ でなければならない。

(ii) について。 $x = m_x + \lambda_x e, y = m_y + \lambda_y e$ とし、 $m_x, m_y \in M$ で、 $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}$ とし、さらに $a, b \in \mathbb{R}$ とする。 $z = ax + by$ について、 $z = m_z + \lambda_z e$ となる $m_z \in M$ と $\lambda_z \in \mathbb{R}$ を取る。このとき、

$$z = [am_x + bm_y] + [a\lambda_x + b\lambda_y]e$$

となる。 $am_x + bm_y \in M$ であり、 $a\lambda_x + b\lambda_y \in \mathbb{R}$ であるから、表現の一意性によって

$$m_z = am_x + bm_y, \quad \lambda_z = a\lambda_x + b\lambda_y$$

を得るが、これは Λ と p の線形性を意味する。

問題 2 1 : (i) から (ii) について。 $M + \mathbb{R}e$ は M を含む線形空間であるから、 M の極大性によって $M + \mathbb{R}e$ は M か X のどちらかと一致しなければならないが、 $e \in (M + \mathbb{R}e) \setminus M$ であるから、 $M + \mathbb{R}e = X$ でなければならない。

(ii) から (i) について。 M' が M を真部分空間として含むと仮定する。このとき、 $e \in M' \setminus M$ となる e をひとつ取れば、 $X = M + \mathbb{R}e \subset M'$ であるため、 $M' = X$ を得る。故に M は極大である。

問題 2 2 : $H = \{x \in X | \Lambda(x - x^*) = 0\}$ ならば $\alpha = \Lambda(x^*)$ とすればよい。逆に $H = \{x \in X | \Lambda(x) = \alpha\}$ ならば $x^* \in H$ をひとつ選べば $H = \{x \in X | \Lambda(x - x^*) = 0\}$ である。

問題 2 3 : $e \in X \setminus M$ を適当に選び、 $\Lambda_1(e) = a, \Lambda_2(e) = b$ とする。 $e \notin M$ なので $b \neq 0$ に注意する。任意の $x \in X$ に対して $x = m_x + \lambda_x e$ となる $m_x \in M$ と $\lambda_x \in \mathbb{R}$ が一意的に存在するが、このとき

$$\Lambda_1(x) = \lambda_x a, \quad \Lambda_2(x) = \lambda_x b$$

であるから、 Λ_1 は Λ_2 の $\frac{a}{b}$ 倍である。

問題 2 4 :

(1) M は閉でない超平面であると仮定する。仮定から、 $e \in \text{cl}.M \setminus M$ を取れる。定理 4.12 の (ii) によって $X = M + \mathbb{R}e$ となる。ここで $x \in X$ を任意にとると、 $x = m + te$ となる $m \in M$ と $t \in \mathbb{R}$ が存在する。 U を x の任意の開近傍としたとき、 $V \equiv \frac{1}{t}(U - m)$ は補題 1 と補題 2 によって e の開近傍であり、よって $w \in M \cap V$ が存在する。このとき、 $tw + m \in M \cap U$ となる。つまり、 x の任意の開近傍は M の元を含むため、 $\text{cl}.M = X$ を得る。

(2) (i) から (ii) について。 Λ は 0 で不連続であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、0 の任意の開近傍 U に対して $x \in U$ かつ $|\Lambda(x)| \geq \varepsilon$ となるような x が存在する。そこで 0 の開近傍 V をひとつ固定すれば、我々の補題 2 から $U_N \equiv \frac{1}{N}V$ もまた 0 の開近傍である。対応して $|\Lambda(x_N)| \geq \varepsilon$ となる $x_N \in U_N$ を取り、 $y_N = Nx_N$ とすると、 $y_N \in V$ であり、かつ $|\Lambda(y_N)| = N|\Lambda(x_N)| \geq N\varepsilon$ となる。故に、 Λ は 0 の任意の開近傍上で非有界である。

次に、 $e \notin M$ を任意にとる。仮定から $\Lambda(e) \neq 0$ である。 e の任意の開近傍 U をひと

つ取ると、補題1によって $V = U - e$ は 0 の近傍である。 $f : (a, x) \mapsto ax$ は連続であるので、 $f^{-1}(V)$ は $(0, 0)$ の近傍である。直積位相の性質により、ある $\varepsilon > 0$ と $0 \in X$ の開近傍 W に対して $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times W \subset f^{-1}(V)$ となる。ここで εW は 0 の開近傍であるから、 $|\Lambda(x)| \geq |\Lambda(e)|$ となるような $x \in \varepsilon W$ が存在する。 $z = -\frac{\Lambda(e)}{\Lambda(x)}x$ と定義する。 $x = \varepsilon y$ となる $y \in W$ を取ると、 $\left| \frac{\Lambda(e)}{\Lambda(x)} \right| \leq 1$ であるから、 $-\frac{\Lambda(e)}{\Lambda(x)}\varepsilon \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$ であり、故に $z \in f((-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times W) \subset V$ となる。以上によって $z + e \in U$ が示せたが、一方で $\Lambda(z + e) = 0$ であるから、 $z + e \in M$ となる。故に、 e の任意の開近傍が M の元を含むことが示されたので、 $e \in \text{cl.} M$ が示せた。

(ii) から (i) について。まず $e \notin M$ を取る。このとき、 e の任意の近傍には Λ の値が 0 になるようなものが含まれる。 $\Lambda(e) \neq 0$ であるから、これは Λ が e で不連続であることを意味する。

次に $x \in X$ を任意に取る。もし Λ が x で連続であれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある x の近傍 U が存在して $y \in U$ ならば $|\Lambda(y) - \Lambda(x)| < \varepsilon$ である。このとき、上の e に対して、 $V = e - x + U$ は e の近傍であり、さらに $y' \in V$ ならば $|\Lambda(y') - \Lambda(e)| < \varepsilon$ である。これは Λ が e で連続であることになり、矛盾である。そこで Λ は x で不連続であることになる。以上で証明が完成した。

問題25 : $x \in \partial C$ としたとき、 C の内部を A 、 $\{x\}$ を B として、定理 4.14(i) を適用すれば、連続線形汎関数 Λ と a のペアについて、すべての $y \in A$ について

$$\Lambda(y) < \Lambda(x)$$

となるものが存在する。 $z \in C$ ならば、定理 4.2 から z に収束する A の点列 (y_n) が取れるが、 $\Lambda(y_n) < \Lambda(x)$ が常に成り立つため、 Λ の連続性から $\Lambda(z) \leq \Lambda(x)$ を得る。したがって

$$C \subset \{z \in X | \Lambda(z) \leq \Lambda(x)\}$$

となり、証明が完成する。

問題26 : C を含むすべての半空間の共通部分を D とすれば、 $C \subset D$ となる。逆に $x \notin C$ のとき、 $B = C$ 、 $A = \{x\}$ として定理 4.14(ii) を適用すれば、 x を含まず C を含む半空間の存在が示せるため、 $D \subset C$ となる。以上で $C = D$ が示された。

問題27 : 1 について。 $x, y \in M, t \in [0, 1], z = (1 - t)x + y \in E_2$ とする。このとき、 $E_2 \subset E_1$ なので $(1 - t)x + ty \in E_1$ であり、 E_1 が M の端集合であることから $x, y \in E_1$

を得る。すると E_2 が E_2 の端集合であることから、 $x, y \in E_2$ でなければならない。

2 について。 $x, y \in M, t \in [0, 1], z = (1-t)x + ty \in \cap_a S_a$ とすれば、任意の a に対して $x, y \in S_a$ となるため、 $x, y \in \cap_a S_a$ である。

3 は 1 の特殊ケースに過ぎない。

問題 28 : $\ddot{K} \subset K$ であるから、 $\overline{\text{co}}(\ddot{K}) \subset \overline{\text{co}}(K)$ は明らかである。逆に、 $\overline{\text{co}}(\ddot{K})$ は K を含む閉凸集合であるため、それは $\overline{\text{co}}(K)$ を含まなければならない。以上で証明が完成した。

問題 29 : $x, y \in C \setminus E$ と仮定し、 $t \in [0, 1]$ とする。 C は凸であるから、 $z = (1-t)x + ty \in C$ となる。一方、 $z \in E$ なら $x, y \in E$ であるがこれはあり得ない。よって $z \notin E$ 。したがって $z \in C \setminus E$ である。

反例について。これは、 $C = [0, 1] \times [0, 1]$ として、 $E = [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$ とすれば、 $C \setminus E$ は凸であるが、

$$\frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 0) \in E, (1, 0) \notin E$$

であるから E は端集合ではない。

問題 30 : pp.183-184 で扱われている集合

$$K^* = \{0\} \cup \{n^{-1}e_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$$

を考えよう。この集合はコンパクトであり、かつ $\text{co}K^*$ は閉ではない。一方、 $K = \overline{\text{co}}K^*$ とすると、 K は定理 4.6 からコンパクト凸集合である。したがって、 $K^* = \ddot{K}$ が示されれば証明が終わる。

$y \in \text{co}K^*$ とすれば $y_n \in [0, n^{-1}]$ である。 $\Lambda(y) = y_n$ とすればこの関数は

$$|\Lambda(y)| \leq \|y\|_2$$

となるため連続であり、よって $y \in K$ ならば $y_n \in [0, n^{-1}]$ である。今度は $\Lambda^*(y) = ny_n + my_m$ とすると、 $\text{co}K^*$ 上では $\Lambda^*(y) \leq 1$ であるが、

$$|\Lambda^*(y)| \leq (n+m)\|y\|_2$$

であるから、 Λ^* は連続で、よって $y \in K$ ならば $\Lambda(y) \leq 1$ となる。ここで、もし $y \in K$ かつ $y_n = n^{-1}$ であるとすれば、上の結果から $y = n^{-1}e_n$ でなければならない、これは $K^* \subset \ddot{K}$ を意味する。一方、 $y \in K$ とし、 $n \neq m$ かつ $y_n, y_m \neq 0$ となる n, m が存在したとすると、定理 4.3 から y に収束する $\text{co}K^*$ の点列 (z^k) が存在する。 $\|z^k - y\|_2 \rightarrow 0$

なので、十分大きな k については $z_n^k, z_m^k \neq 0$ となるが、このとき

$$z^k = \sum_{\ell=1}^L c_\ell w^{k\ell}, \quad c_\ell^k > 0, \quad \sum_{\ell=1}^L c_\ell^k = 1$$

となる $c_1^k, \dots, c_L^k \in \mathbb{R}$ と $w^{k1}, \dots, w^{kL} \in K^*$ を取れば、 $w^{k\ell}$ の中には $n^{-1}e_n, m^{-1}e_n$ が含まれており、対応する ℓ を ℓ_n, ℓ_m と書けば

$$c_{\ell_n}^k = n z_n^k, c_{\ell_m}^k = m z_m^k$$

とならなければならない。そこで $I = \{\ell_n, \ell_m\}$ として、

$$v^{1k} = \sum_{\ell \notin I} c_\ell^k w^{k\ell} + (c_{\ell_n}^k + c_{\ell_m}^k) w^{k\ell_n},$$

$$v^{2k} = \sum_{\ell \notin I} c_\ell^k w^{k\ell} + (c_{\ell_n}^k + c_{\ell_m}^k) w^{k\ell_m}$$

とする。このとき $v^{ik} \in \text{co}K^*$ であり、また $t_k = \frac{c_{\ell_m}^k}{c_{\ell_n}^k + c_{\ell_m}^k}$ と取ったときに $z^k = (1 - t_k)v^{1k} + t_k v^{2k}$ となる。さらに、 (v^{ik}) はコンパクト集合 K 上の点列であるから、必要ならば部分列を取ること収束を仮定できる。そこで $v^i = \lim_{k \rightarrow \infty} v^{ik}$ とすると、

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \lim_{k \rightarrow \infty} ((1 - t_k)v^{1k} + t_k v^{2k}) = \frac{ny_n}{ny_n + my_m} v^1 + \frac{my_m}{ny_n + my_m} v^2$$

となり、したがって y は v^1 と v^2 によって挟まれるために K の端点ではない。これは $\vec{K} = K^*$ を意味するため、これで証明が完成した。

問題 3 1 : $x \in c_0$ かつ $\|x\| \leq 1$ とする。まず、 $x_n = 0$ であるような n が存在するでしょう。このとき、 $y_n = 1, z_n = -1$ とし、 $m \neq n$ ならば $y_m = z_m = x_m$ とすれば、 $\|y\| = \|z\| = 1$ かつ $x = \frac{1}{2}(y + z)$ となるため、 x は単位球の端点ではない。よってすべての n について $x_n \neq 0$ を仮定する。 $x \in c_0 \setminus \{0\}$ であるから、ある n に対して $0 < |x_n| < 1$ となる。そこで $t = |x_n|$ とすると、 $y_n = 0, z_n = 1$ で $m \neq n$ ならば $y_m = z_m = x_m$ としたとき、 $\|y\| = 1, \|z\| \leq 1$ で、さらに $x = (1 - t)y + tz$ となるため、やはり x は単位球の端点ではない。

問題 3 2 : 仮定がおかしい。たとえば X として有限個の n に対してのみ $x_n \neq 0$ となる数列の空間とし、 ℓ_∞ のノルムを導入したとき、問題 3 0 の e_n の集合の全体に $e_0 \equiv e_1 + e_2$

を加えてできた集合は条件を全部満たすが、(1)すら成り立たない。このため、(c)の条件を

$$e_n \notin \text{span}\{e_m | m \neq n\}$$

と書き換えて議論を行おうとしたのだが、やはり容易に反例が導出される。実際、選択公理の下では任意の無限次元線形ノルム空間には不連続な線形汎関数の存在を証明することができる。 $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ が不連続な線形汎関数で、 $M = \text{Ker}\Lambda$ とする。 $e_0 \in X \setminus M$ を取る。 $N(e_0)$ は有限集合なので、 $M' = \text{span}\{e_n | n \in \mathbb{N}, n \notin N(e_0)\}$ と置けば $M' \subset M$ となる。そこで、 $n \notin N(e_0)$ に対しては $f_n = e_n$ とする。一方、定理 4.12 から $X = M + \mathbb{R}e_0$ なので、 $f_0 = e_0$ とし、また $n \in N(e_0)$ に対して $e_n = f_n + t_n e_0$ となる $f_n \in M$ と $t_n \in \mathbb{R}$ を取る。 $f_n = 0$ となる n は高々 1 つであるため、 $f_n \neq 0$ となる f_n の集合を D' とすると、これは問題の条件 (a) から (c) までは満たしている。しかしながら問題 2.4 によって M は X 内で稠密なので、 M の元で f_0 を近似することができ、これは a_0 が不連続であることを意味するため、(1) が成り立たない。そこで

$$e_n \notin \text{cl.}(\text{span}\{e_m | m \neq n\})$$

を仮定して議論しようとしたのだが、今度は (3) において、 $a_n(x^*) = 2^{-n}$ がすべての n について成り立つ x^* の存在が示せてしまう。これは仮定 (b) と不整合である。以上から、おそらく深刻な条件の書き落としあるいは書き間違いがあると判断し、本問についてはスキップすることにする。 (K) は問題 3.0 で扱った (K^*) と性質が類似しているので、おそらくはそのようなことがしたかったのであろうが、本問の e_n に当たるものは問題 3.0 では $n^{-1}e_n$ であり、これは ℓ_2 内では (b) を満たさない

問題 3.3 : (i) を仮定する。 $f(x_1)$ あるいは $f(x_2)$ が $+\infty$ であった場合には (1) 式の成立は明白である。よってそうでないときのみ示せばよい。すると $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \text{Epi}f$ であるから、 $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2)) \in \text{Epi}f$$

である。ゆえにやはり (1) が成り立つため、(ii) が示される。

次に、(ii) を仮定する。 $(x_1, a), (x_2, b) \in \text{Epi}f$ とすると、 $a \geq f(x_1), b \geq f(x_2)$ であるから、 $0 \leq t \leq 1$ ならば

$$(1-t)a + tb \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2)$$

であり、したがって $(1-t)(x_1, a) + t(x_2, b) \in \text{Epi}f$ となって、(i) が示される。

(ii) と (iii) の同値性は帰納法により容易に示せるため、省略する。

問題 3 4 : $(x'_1, a), (x'_2, b) \in \text{Epis}_A$ と仮定する。このとき、 $t \in [0, 1]$ ならば

$$\begin{aligned} (1-t)a + tb &\geq \alpha s_A(x'_1) + (1-\alpha)s_A(x'_2) \\ &= (1-t) \sup_{x \in A} x'_1(x) + t \sup_{x \in A} x'_2(x) \\ &\geq \sup_{x \in A} ((1-t)x'_1(x) + tx'_2(x)) \\ &= s_A((1-t)x'_1 + tx'_2) \end{aligned}$$

であるから、 $((1-t)x'_1 + tx'_2, (1-t)a + tb) \in \text{Epis}_A$ が示せた。なお、常に $s_A(x') > -\infty$ は成り立ち、また $s_A(0) = 0 < +\infty$ なので、 s_A は proper であることがわかる。

問題 3 5 :

(1) (i) を仮定する。 $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0p(0) = 0$ であるため、 $p(B_r(0)) \subset (-1, 1)$ となる半径 r が存在する。 $x \in B_2(0)$ なら $y = \frac{r}{2}x \in B_r(0)$ なので、

$$p(x) = \frac{2}{r}p(y) < \frac{2}{r}$$

が成り立つ。次に、 $z \in X \setminus \{0\}$ とすると、

$$p(z) = \|z\|p\left(\frac{z}{\|z\|}\right) < \frac{2}{r}\|z\|$$

であるから、 $p(0) = 0 \leq \frac{2}{r}\|0\|$ と合わせて (ii) を得る。

逆に、(ii) を仮定する。まず、 p の 0 における連続性を示そう。 $p(0) = p(0 \cdot 0) = 0p(0) = 0$ である。次に、 $\varepsilon > 0$ をひとつ固定する。このとき、 $\|x\| < \frac{\varepsilon}{M}$ ならば $p(x) < \varepsilon$ である。またこのとき $\|-x\| = \|x\|$ であるから $p(-x) < \varepsilon$ となる。 p の劣線形性から

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + p(-x)$$

であるから、 $-p(-x) \leq p(x)$ であり、したがって $p(x) > -\varepsilon$ となる。以上から

$$|p(x)| < \varepsilon$$

がわかったので、 p は 0 で連続である。

今度は $x \in X$ とし、 $\varepsilon > 0$ をひとつ固定する。上で示したように p は 0 で連続なので、 $p(B_r(0)) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ となる $r > 0$ が存在する。すると $\|y - x\| < r$ ならば、

$$p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x) < p(x) + \varepsilon$$

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) < p(y) + \varepsilon$$

なので、合わせて

$$|p(y) - p(x)| < \varepsilon$$

を得るため、 p は x においても連続である。故に、(ii) は (i) を含意する。

- (2) a. について。 $p_C(0) = 0$ は明らかであるから、 $t = 0$ のときには $p(tx) = tp(x)$ である。次に $t > 0$ とする。このとき、

$$\frac{1}{\lambda}x \in C \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda t}tx \in C$$

であるから、ここからただちに $p_C(tx) = tp_C(x)$ を得る。最後に $\frac{1}{\lambda}x, \frac{1}{\mu}y \in C$ とすれば、 C の凸性から

$$\frac{1}{\lambda + \mu}(x + y) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\lambda}x + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\mu}y \in C$$

を得る。よって、

$$p_C(x + y) \leq \lambda + \mu$$

であるから、 λ, μ の下限を取って

$$p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$$

を得る。これで a. が示せた。

次に b. について。 $B_r(0) \subset C$ となる半径 $r > 0$ を取る。 $x \in X$ とすれば、

$$\frac{1}{2r\|x\|}x \in B_r(0) \subset C$$

であるから、 $p_C(x) \leq 2r\|x\|$ を得る。(1) により、 p_C は連続である。

問題 36 :

- (1) f が x_0 において連続ならば、ある $r > 0$ について $\|x - x_0\| < r$ となる任意の $x \in X$ に対して $|f(x) - f(x_0)| < 1$ となるから、 f は $B_r(x_0)$ 上で有界である。
- (2) すでに (iii) が仮定されているため、 $(x_0, \alpha_0) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ は仮定してよい。 $x \in \text{int.}(\text{Dom}f)$ とし、 $x - t(x_0 - x) \in \text{Dom}f$ となる $t > 0$ をひとつ取る。このとき、 $s = \frac{1}{1+t}$ とすると、

$$x = (1 - s)x_0 + s(x - t(x_0 - x))$$

となる。 $y = x - t(x_0 - x)$ とし、 $\alpha = f(y)$ とすれば、定理 4.2 から

$$(1 - s)(x_0, \alpha_0) + s(y, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$$

となるので、

$$x = \text{proj}_X((1 - s)(x_0, \alpha_0) + s(y, \alpha)) \in \text{proj}_X \text{int.}(\text{Epi}f)$$

を得る。逆に $x \in \text{proj}_X \text{int.}(\text{Epi}f)$ であるとすれば、 $(x, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ となる α を取ってやれば、すでに本文にあるように f は x の近くで上に有界なので、 $x \in \text{int.}(\text{Dom}f)$ を得る。

- (3) 定理 4.20 から (iv) は (iii) を含意するので、(2) で示した結果はここで用いてよい。そこで $(x, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ であるとすれば、(2) で示したことから $x \in \text{int.}(\text{Dom}f)$ であり、かつ $\alpha > f(x)$ である。逆に、 $x \in \text{int.}(\text{Dom}f)$ であれば、 $(x, \beta) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ となる β が存在する。このとき、 x の開近傍 U で、 $y \in U$ ならば $f(y) < \beta$ となるようなものが存在する。そこで、 $y \in U$ かつ $\gamma > \beta$ ならば $(y, \gamma) \in \text{Epi}f$ となる。これは、 $\alpha > \beta$ ならば $(x, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ であることを意味する。 $f(x) < \alpha < \beta$ の場合、 (x, α) は $(x, f(x))$ と (x, β) の凸結合で書けるため、定理 4.2 から $(x, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ を得る。以上から、 $x \in \text{int.}(\text{Dom}f)$ かつ $\alpha > f(x)$ であるときには常に $(x, \alpha) \in \text{int.}(\text{Epi}f)$ であることが示された。

問題 37 : $x \in \text{co}\{\pm e_1, \dots, \pm e_\ell\}$ とすると、ある $\lambda_1, \dots, \lambda_{2\ell} \in [0, 1]$ に対して

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_i - \lambda_{\ell+i}) e_i, \quad \sum_{i=1}^{2\ell} \lambda_i = 1$$

となる。 $\mu_i = \lambda_i - \lambda_{\ell+i}$ とすれば、

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i e_i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} |\mu_i| \leq 1$$

となる。これは $\|x\|_1 \leq 1$ を意味する。

逆に $\|x\|_1 = 1$ とすれば、

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i e_i, \quad \sum_{i=1}^{\ell} |\mu_i| = 1$$

となる $\mu_1, \dots, \mu_\ell \in [-1, 1]$ を見つけることができる。ここで

$$\lambda_i = \max\{0, \mu_i\}, \quad \lambda_{\ell+i} = \lambda_i - \mu_i$$

とすれば、

$$\ell_i \in [0, 1], \quad x = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_i - \lambda_{\ell+i}) e_i, \quad \sum_{i=1}^{2\ell} \lambda_i = 1$$

が成り立つため、これで $\text{co}\{\pm e_1, \dots, \pm e_\ell\}$ は閉単位球面を含む凸集合であることがわかった。閉単位球面の凸包は閉単位球と一致するため、 $\text{co}\{\pm e_1, \dots, \pm e_\ell\}$ は閉単位球それ自体を含む。以上で証明が完成した。

問題 38 :

(1) $f \leq g$ ならば、 $x' \in X'$ のとき、任意の $x \in X$ に対して

$$\langle x', x \rangle - f(x) \geq \langle x', x \rangle - g(x)$$

であるから、 x について上限を取って $f^*(x') \geq g^*(x')$ を得る。

(2) $x \in X, x' \in X'$ ならば $f^*(x') \geq \langle x', x \rangle - f(x)$ であるから、これを整理すれば求めている式を得る。

(3) 上の (2) をさらに変形して

$$f(x) \geq \langle x', x \rangle - f^*(x')$$

を得るため、この x' についての上限を取れば $f(x) \geq f^{**}(x)$ を得る。

(4) まず、分離定理を用いるためには $\text{Epi}f$ が閉でなければならないので、それを示す。

(x_n, a_n) は $\text{Epi}f$ の点列で、 (x, a) に収束していると仮定する。このときもし $(x, a) \notin \text{Epi}f$ であるとすれば、 $f(x) - a = 2\varepsilon$ としたとき、 $\varepsilon > 0$ である。 f の下半連続性によって、 x のある近傍 U が存在して $y \in U$ ならば $f(y) > a + \varepsilon$ となる。しかし十分大きな n に対して $x_n \in U$ かつ $a_n < a + \varepsilon$ であるから、これは $f(x_n) > a_n$ を意味し、 $(x_n, a_n) \notin \text{Epi}f$ となって矛盾が生ずる。故に主張が示せた。

後はヒントの通りに

$$\sup_{(x, \alpha) \in \text{Epi}f} [\langle y'_0, x \rangle + \beta_0 \alpha] < \langle y'_0, x_0 \rangle + \beta_0 (f(x_0) - 1)$$

となる (y'_0, β_0) を取る。 $\beta_0 > 0$ ならば左辺が $+\infty$ になってしまってこれはあり得ない。また、

$$\langle y'_0, x_0 \rangle \leq \sup_{(x, \alpha) \in \text{Epi}f} \langle y'_0, x \rangle$$

であるから、 $\beta_0 = 0$ もあり得ない。以上から $\beta_0 < 0$ であるが、このとき $z'_0 = \frac{1}{|\beta_0|} y'_0$ とすると

$$f^*(z'_0) = \sup_{x \in \text{Dom} f} [\langle z'_0, x \rangle - f(x)] = \sup_{(x, \alpha) \in \text{Epi} f} [\langle z'_0, x \rangle - \alpha] < \langle z'_0, x_0 \rangle - f(x_0) + 1$$

を得るため、 $z'_0 \in \text{Dom} f^*$ となる。

- (5) ヒントの最初の部分を少し補足する。まず、 f は proper であると仮定するので、 f^* も proper である。よって $f^*(x') \in \mathbb{R}$ となる $x' \in X'$ が存在するので、(4) のヒントの最初に書かれているのと同じようにして $f^{**} \geq -\infty$ を得る。一方で (3) から、 $f(x) < +\infty$ であれば $f^{**}(x) < +\infty$ なので、これで f^{**} が proper であることが示された。特に、 $\text{Dom} f^{**} \neq \emptyset$ である。あとはヒントの通りに背理法の仮定として $f^{**}(x_0) < f(x_0)$ となる $x_0 \in \text{Dom} f^{**}$ を取り、対応して (y', β) を取る。まず $\beta = 0$ とする。このとき、 $y = x_0$ とすれば

$$\langle y', x_0 \rangle > \langle y', x_0 \rangle$$

となって矛盾が生ずる。

次に $\beta > 0$ とする。 $(x_0, f(x_0)) \in \text{Epi} f$ であるから、両辺を β で割れば、

$$\frac{1}{\beta} \langle y', x_0 \rangle + f^{**}(x_0) > \frac{1}{\beta} \langle y', x_0 \rangle + f(x_0)$$

となり、 $f^{**}(x_0) > f(x_0)$ を得るが、(3) に矛盾する。

最後に $\beta < 0$ とする。これも両辺を $|\beta|$ で割れば、

$$\frac{1}{|\beta|} \langle y', x_0 \rangle - f^{**}(x_0) > \sup_y \left[\frac{1}{|\beta|} \langle y', y \rangle - f(y) \right] = f^*(|\beta|^{-1} y')$$

を得る。したがって、

$$\langle |\beta|^{-1} y', x_0 \rangle - f^*(|\beta|^{-1} y') > f^{**}(x_0)$$

が成り立つが、左辺の上限が $f^{**}(x_0)$ なのだからこれは矛盾である。

問題 39：答えが書いてあるが、一応導出法も書いておく。

- (1) まず、

$$f^*(x'_0) = \sup_{x \in X} [\langle x'_0, x \rangle - \langle x'_0, x \rangle - \alpha] = -\alpha$$

を得る。 $x' \neq x'_0$ のとき、 $\langle x' - x'_0, x \rangle > 0$ となる $x \in X$ が存在するので、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^*(x') \geq \langle x', nx \rangle - \langle x'_0, x \rangle - \alpha = n(\langle x' - x'_0, x \rangle) - \alpha$$

となるため、 $f^*(x') = +\infty$ でなければならない。

(2) このとき、

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} [\langle x', x \rangle - \delta_A(x)] = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle = s_A(x')$$

を得る。

(3) まず、 A が $0 \in \text{int}.A$ を満たす凸集合ならば、問題 3 5 で f の凸性が示されているが、いまはこの仮定がない。そうすると f の凸性を証明できそうになかったのが、追加的な仮定として A は凸で、 $0 \in \text{int}.A$ とする。このとき、 $x' \in A^\circ$ とすると、任意の $x \in A$ に対して $\langle x', x \rangle \leq 1$ である。 $\lambda > f(x)$ ならば $\lambda^{-1}x \in A$ であるから、

$$1 \geq \langle x', \lambda^{-1}x \rangle = \lambda^{-1} \langle x', x \rangle$$

となり、したがって

$$\langle x', x \rangle \leq \lambda$$

でなければならない。 λ について下限を取れば

$$\langle x', x \rangle \leq f(x)$$

を得る。以上から $f^*(x') \leq 0$ が示されたが、一方で

$$f^*(x') \geq \langle x^*, 0 \rangle - f(0) = 0$$

であるため、 $f^*(x') = 0$ を得る。次に、 $x' \notin A^\circ$ とすると、ある $x \in A$ に対して $\langle x', x \rangle > 1$ である。このとき、 $f(x) \leq 1$ なので、上と同様の手続きで

$$\langle x', x \rangle > f(x)$$

を得るが、問題 3 5 より $\lambda > 0$ ならば $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ であるから、任意の $\lambda > 0$ に対して

$$f^*(x') \geq \lambda \langle x', x \rangle - f(\lambda x) = \lambda [\langle x', x \rangle - f(x)]$$

となる。よって $f^*(x') = +\infty$ でなければならない。